PROBLEMA 5.120

Massa su guida circolare e molla II ⋆⋆

Una particella di massa m è vincolata alla guida circolare di raggio R posta in un piano orizzontale. Inoltre è fissata ad una molla di costante k e lunghezza a riposo ℓ_0. L'altro estremo della molla è fissato a un punto posto a una distanza $R/2$ dal centro della guida.

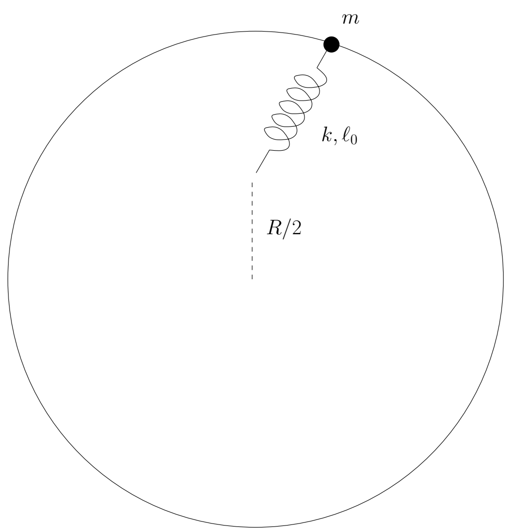

Figura 5.105.: Il sistema considerato nell'esercizio.

1. Se $\ell_0 = 0$ determinare la minima velocità che deve avere la particella nel punto di minimo allungamento della molla per poter percorrere completamente la guida.
2. In funzione di $\ell_0 \geq 0$ discutere le posizioni di equilibrio del sistema.
3. Scelta una opportuna coordinata scrivere le equazioni del moto per il sistema, sempre per ℓ_0 generico.

Soluzione[16]

Domanda 1

Possiamo scegliere come coordinata l'angolo θ tra il raggio corrispondente alla posizione della particella e quello corrispondente alla posizione di massimo avvicinamento. L'energia cinetica si scriverà quindi

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

[16] Secondo esercizio scritto 11/1/2007

e quella potenziale

$$U = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Con

$$\ell = \sqrt{R^2 \sin^2\theta + (R\cos\theta - R/2)^2} = R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}\,.$$

Nel nostro caso $\ell_0 = 0$ quindi

$$E = K + U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{kR^2}{2}\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)\,.$$

Eguagliando l'energia nel punto di massimo e di minimo avvicinamento otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\ell_{min}^2 > \frac{1}{2}k\ell_{max}^2$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\ell_{max}^2 - \ell_{min}^2\right)}$$

ossia

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}R^2\left(\ell_{max}^2 - \ell_{min}^2\right)} = R\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Domanda 2

Se sulla molla vi è tensione, una posizione sarà di equilibrio solo quando questa è ortogonale al vincolo. Ciò è possibile soltanto in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

L'altra possibilità è che non vi sia tensione. Questo accade quando la molla è alla sua lunghezza di riposo, il che significa

$$\ell_0^2 = R^2\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)$$

cosa possibile solo se

$$\frac{1}{2}R \le \ell_0 \le \frac{3}{2}R\,.$$

Il relativo angolo è dato da

$$\cos\theta = \frac{5}{4} - \frac{\ell_0^2}{R^2}$$

Domanda 3

Possiamo ottenere le equazioni del moto derivando l'energia totale rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}\left(R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}-\ell_0\right)^2\right] \\ &= mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + k\left(R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}-\ell_0\right)\frac{R\sin\theta}{2\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}}\dot{\theta}\end{aligned}$$

da cui

$$mR\ddot{\theta} + \frac{k}{2}\left(R - \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}}\right)\sin\theta = 0$$