PROBLEMA 5.121

Orbita di un satellite ⋆⋆

Un satellite di massa m si trova in orbita circolare attorno alla terra, la durata del periodo è 24h. La massa del satellite è molto minore della massa della terra, $m \ll M_T = 6 \times 10^{24}$kg.

1. Determinare il raggio dell'orbita, sapendo che la costante di gravitazione universale vale $G = 6.7 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$.
2. Mediante un opportuno impulso $\vec{I}$ applicato istantaneamente in direzione tangenziale si vuole portare il satellite su un'orbita parabolica. Determinare $\vec{I}$.
3. Supponendo nuovamente il satellite in orbita circolare come al punto 1., lo si vuole portare su un'orbita circolare di raggio doppio, applicando ad opportuni istanti due impulsi $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$, passando attraverso un'orbita ellittica intermedia. Calcolare $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$ supponendoli entrambi applicati in direzione tangenziale.

Soluzioni[17]

Domanda 1 L'equazione del moto in direzione radiale si scrive

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM_T}{R^2}$$

e d'altra parte per il periodo vale

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

da cui

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \\ &\simeq \left(\frac{6.7 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times (24 \times 60 \times 60)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \mathrm{m} \\ &\simeq 4.2 \times 10^7 \mathrm{m} \end{aligned}$$

Domanda 2 Prima di applicare l'impulso l'energia vale

$$E = \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}$$

dato che l'orbita è circolare. Inoltre sappiamo che il potenziale effettivo è minimo,

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{L^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}\right) = -\frac{L^2}{mR^3} + \frac{k}{R^2} = 0$$

[17] Seconda domanda compitino 13 aprile 2011

da cui

$$L^2 = kmR$$

Applicando l'impulso cambiamo il momento angolare di $\Delta L = IR$. Dato che la velocità radiale resta nulla la nuova energia vale

$$E' = \frac{(L+IR)^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}$$

e per avere un'orbita parabolica deve essere $E' = 0$. Quindi (supponendo $L > 0$) otteniamo

$$\left(\sqrt{kmR} + IR\right)^2 = 2kmR$$

da cui

$$I = -\left(1 \pm \sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Si può quindi applicare l'impulso con lo stesso verso della velocità

$$I = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

oppure in verso opposto

$$I = -\left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Domanda 3 Applicando il primo impulso si ottiene un'orbita ellittica che deve avere il perigeo in R e l'apogeo in $2R$. Per ottenere questo l'equazione

$$E_1 = \frac{(L+I_1R)^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

deve essere verificata in $r = R$ e $r = 2R$, ossia

$$E_1 = \frac{(L+I_1R)^2}{2mR^2} - \frac{k}{R}$$
$$E_1 = \frac{(L+I_1R)^2}{8mR^2} - \frac{k}{2R}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$\frac{3}{8}\frac{(L+I_1R)^2}{mR^2} - \frac{k}{2R} = 0$$

da cui

$$I_1 = -\left(1 \pm \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Il secondo impulso deve essere applicato all'apogeo, in modo da ottenere un'orbita circolare di raggio $2R$ e quindi un momento angolare

$$L' = \pm\sqrt{2kmR}$$

Se vogliamo $L' > 0$ abbiamo dunque le due possibilità determinate da

$$L + RI_1 + 2RI_2 = \sqrt{2kmR}$$

ossia

$$I_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{\frac{km}{R}}$$

mentre se $L' < 0$ (l'orbita circolare finale è percorsa nel verso opposto di quella iniziale) deve essere

$$L + RI_1 + 2RI_2 = -\sqrt{2kmR}$$

e quindi

$$I_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Riassumendo abbiamo le quattro possibilità in tabella

I_1	I_2
$-\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$