PROBLEMA 5.122

Nibiru ⋆⋆ $\mathcal{S}$

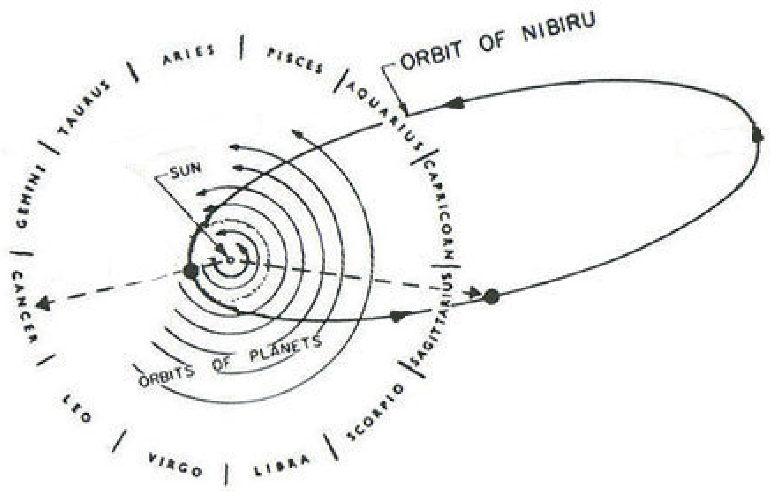

Figura 5.106.: L'orbita di Nibiru.

Secondo una teoria accreditata da un grandissimo numero di pagine web ogni 3600 anni il pianeta Nibiru arriva con la sua orbita in prossimità della terra. Il prossimo avvicinamento è previsto da alcuni attorno al primo aprile del 2013. Nel seguito si considereranno solo le interazioni gravitazionali tra la terra e il sole e tra Nibiru e il sole, per semplicità si considererà la massa di Nibiru uguale a quella della terra, e l'orbita di quest'ultima circolare e di raggio $a_T \simeq 1.5 \times 10^{11}$m. Inoltre si supporrà che il perielio di Nibiru e quello della terra coincidano, che le orbite siano nello stesso piano e percorse nello stesso senso.

1. Sulla base dei dati precedenti calcolate il rapporto tra l'afelio di Nibiru e la distanza terra-sole.

2. Modellando l'eventuale scontro tra la terra e Nibiru come un'urto istantaneo completamente anelastico al perielio calcolare la frazione di energia cinetica dissipata durante l'urto.

3. Determinare l'afelio dell'unico pianeta risultante.

Soluzione[18]

Domanda 1

Conosciamo il periodo T dell'orbita e il perielio. Dalla terza legge di Keplero sappiamo che

$$\frac{T_N^2}{a_N^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3}$$

dove a è il semiasse maggiore. Quindi

$$a_N = \left(\frac{T_N}{T_T}\right)^{2/3} a_T \simeq 234.9\, a_T$$

Indicati con r_- e r_+ il perielio e l'afelio dell'orbita abbiamo

$$r_+ + r_- = 2a$$

e quindi

$$r_+ = 2a_N - a_T \simeq 468.9\, a_T$$

Domanda 2

Al momento dell'urto le velocità radiali sono entrambe nulle, e si conserva il momento angolare totale (o anche la quantità di moto nella direzione tangente all'orbita, che è proporzionale a quest'ultimo). Quindi

$$L_f = L_T + L_N$$

L'energia cinetica immediatamente prima dell'urto è

$$E_i = \frac{L_T^2 + L_N^2}{2m_T a_T^2}$$

e immediatamente dopo l'urto

$$E_f = \frac{(L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2}$$

quindi si è dissipata un'energia

$$\Delta E = \frac{2L_T^2 + 2L_N^2 - (L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2} = \frac{(L_T - L_N)^2}{4m_T a_T^2}$$

e quindi

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{1}{2}\frac{(L_T - L_N)^2}{L_T^2 + L_N^2} = \frac{1}{2}\frac{(L_T - L_N)^2}{L_T^2 + L_N^2} = \frac{1}{2}\frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2}$$

[18]Secondo esercizio compitino 18 aprile 2012

dove abbiamo indicato con ρ il rapporto

$$\rho = \frac{L_T}{L_N}$$

Dato che (indicando con M_S la massa del sole)

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2m_T r_-^2} - \frac{Gm_T M_S}{r_-} \\ E &= \frac{L^2}{2m_T r_+^2} - \frac{Gm_T M_S}{r_+} \end{aligned}$$

abbiamo

$$L = \sqrt{2GM_S m_T^2 \left(\frac{r_+ r_-}{r_+ + r_-}\right)}$$

e quindi

$$\rho = \frac{\sqrt{GM_S m_T^2 a_T}}{\sqrt{2GM_S m_T^2 \frac{a_T r_+}{r_+ + a_T}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(a_T + r_+)}{r_+}} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1 + 468.9}{468.9}} \simeq 0.7$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{1}{2}\frac{(1-0.7)^2}{1+(0.7)^2} \simeq 0.03$$

Domanda 3

L'orbita dopo l'urto è definita dal valore delle due costanti del moto, l'energia

$$E = \frac{(L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2} - \frac{2Gm_T M_S}{a_T}$$

e il momento angolare

$$L = L_T + L_N$$

Il perielio e l'afelio sono soluzioni dell'equazione

$$\frac{L^2}{4m_T r^2} - \frac{2Gm_T M_S}{r} - E = \frac{L^2}{4m_T}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-}\right) = 0$$

e quindi, dato che una delle due soluzioni concide com a_T, possiamo scrivere per l'altra

$$\frac{L^2}{4m_T}\frac{1}{r}\frac{1}{a_T} = -E$$

cioè

$$\begin{aligned}
r &= -\frac{L^2}{4m_T a_T E} = \frac{(L_T+L_N)^2}{\left[8Gm_T^2 M_S a_T - (L_T+L_N)^2\right]} a_T \\
&= \frac{(L_T+L_N)^2}{\left[8L_T^2 - (L_T+L_N)^2\right]} a_T = \frac{(L_T+L_N)^2}{7L_T^2 - 2L_N L_T - L_N^2} a_T \\
&= \frac{(1+\rho)^2}{7\rho^2 - 2\rho - 1} a_T \simeq 2.7 a_T
\end{aligned}$$