PROBLEMA 5.124

Urto contro un corpo composito ⋆⋆ S

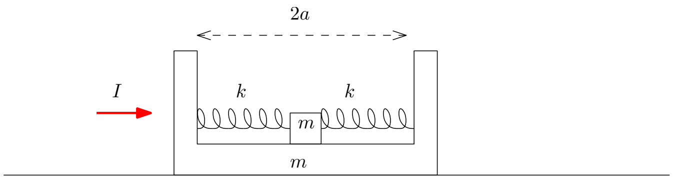

Figura 5.108.:

Un contenitore di massa m della forma in Figura 5.108 ospita al suo interno un corpo puntiforme, pure di massa m. Il corpo può muoversi senza attrito sul fondo, che ha una lunghezza totale $2a$, ed è fissato ai due bordi da molle di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k. Inizialmente il contenitore è in quiete su un piano orizzontale privo di attrito, e anche il corpo si trova all'interno in quiete nella posizione di equilibrio.

1. In un tempo molto breve si applica al contenitore un impulso orizzontale I. Determinare nell'istante immediatamente successivo la velocità del contenitore e quella del corpo all'interno.
2. Per quale valore minimo di I il corpo all'interno urta contro le pareti?
3. Se tra corpo e contenitore esistesse attrito, quale frazione dell'energia cinetica iniziale del sistema verrebbe dissipata?

Soluzione[20]

Domanda 1

Dato che l'urto è istantaneo il corpo all'interno del contenitore non ne risente, e qindi la sua velocità resta nulla. Per la velocità del contenitore abbiamo invece

$$mv_c = I$$

Domanda 2

Usando il teorema di Koenig l'energia del sistema si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\dot{x}_r^2 + \frac{k}{2}(x_r - a)^2 + \frac{k}{2}(x_r + a)^2$$

dove v_{cm} è la velocità del centro di massa (costante) e x_r la posizione del corpo relativa al centro del contenitore. Usando la conservazione dell'energia abbiamo inizialmente

$$E_i = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2 + \frac{2k}{2}a^2$$

[20] Scritto 8 febbraio 2012

e al momento dell'urto, nel caso limite in cui la velocità relativa si annulla,

$$E_f = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{2k}{2}a^2 + \frac{2k}{2}a^2$$

Usando la conservazione dell'energia otteniamo

$$\frac{m}{4}v_c^2 = ka^2$$

e quindi

$$I = mv_c = m\sqrt{\frac{4ka^2}{m}}$$

Domanda 3

L'energia dissipata sarebbe quella cinetica disponibile nel centro di massa. La frazione rispetto alla cinetica totale sarà

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2}{\frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2} = \frac{v_c^2}{4v_{cm}^2 + v_c^2} = \frac{I^2}{I^2 + 4\frac{I^2}{4}} = \frac{1}{2}$$