PROBLEMA 5.125

Un problema inverso in campo centrale ⋆⋆ $\mathcal{S}$

Una particella di massa m si muove in un piano sottoposta ad una forza

$$\vec{F} = A(r)\vec{r}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione della particella, r il suo modulo e $A(r)$ una funzione incognita. Si sa che sono possibili orbite circolari di raggio qualsiasi, e che tutte corrispondono allo stesso valore L_0 del modulo del momento angolare.

1. Determinare $A(r)$.

2. Determinare due costanti del moto e scriverle usando opportune coordinate (si consigliano coordinate polari).

3. Discutere qualitativamente le caratteristiche delle possibili traiettorie della particella. Se, in particolare, esistono delle traiettorie che portano la particella a cadere sul centro, dire se tale caduta avviene in un tempo finito.

Soluzione[21]

Problema 1

In un'orbita circolare

$$-m\frac{v^2}{r} = A(r)r$$

e d'altra parte

$$L_0 = mvr$$

Sostituendo otteniamo

$$-\frac{L_0^2}{mr^3} = A(r)r$$

e quindi

$$A(r) = -\frac{L_0^2}{mr^4}$$

Problema 2

L'energia e il momento angolare si conservano:

$$\begin{aligned} L &= mr^2\dot{\theta} \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{L_0^2}{2mr^2} \end{aligned}$$

[21] Prova scritta 8 febbraio 2012

L'energia potenziale è stata determinata integrando la relazione

$$-\frac{L_0^2}{mr^3} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

da cui

$$U(r) = -\frac{L_0^2}{2mr^2}$$

Problema 3

Il potenziale efficace vale

$$U_{eff} = \frac{L^2 - L_0^2}{2mr^2}$$

e dal suo studio vediamo che per $L^2 > L_0^2$ tutte le orbite sono illimitate. Per $L^2 < L_0^2$ le orbite che corrispondono ad un'energia negativa sono limitate e terminano nel centro. Se invece $E \geq 0$ l'orbita può condurre la particella nel centro o farla sfuggire a $r \to \infty$ a seconda del segno della velocità radiale iniziale. Il caso $L^2 = L_0^2$ è particolare. Il moto radiale è del tipo

$$r(t) = r_0 + v_0 t$$

che corrisponde a una caduta nel centro per $v_0 < 0$, ad un'orbita illimitata per $v_0 > 0$ e a un'orbita circolare per $v_0 = 0$.

Il tempo necessario per la caduta nel centro si può determinare a partire dall'energia, scritta come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 - L_0^2}{2mr^2}$$

e quindi

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{L_0^2 - L^2}{2mr^2}\right)}$$

Possiamo integrare questa equazione differenziale ed ottenere il tempo di caduta da una distanza iniziale r_0

$$\tau = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{L_0^2 - L^2}{2mr^2}\right)}}$$

L'integrale si calcola esplicitamente, ma è sufficiente notare che è finito, ricordando che siamo interessati al caso $L_0^2 > L^2$.