PROBLEMA 5.126

Cilindro spinto in discesa ⋆⋆⋆

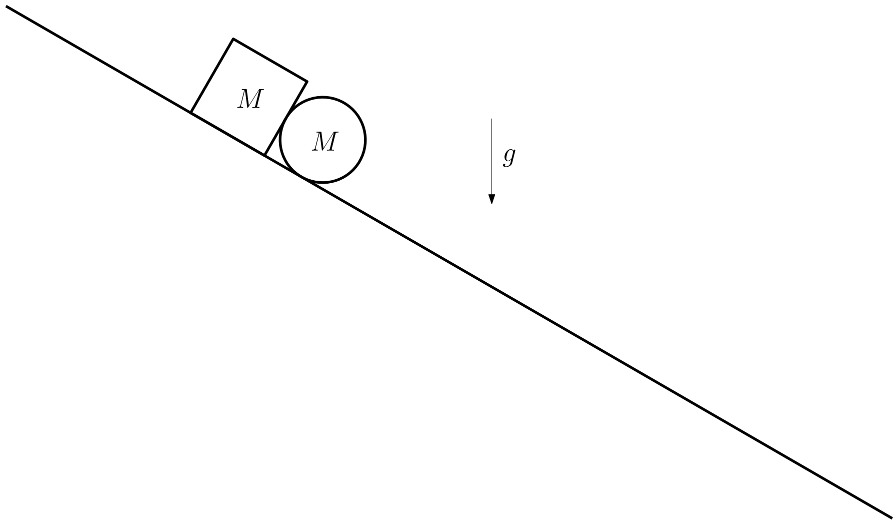

Figura 5.109.: Il cilindro spinto verso il basso da un cubo.

Un cilindro di massa M e raggio R rotola senza strisciare su un piano obliquo inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Un cubo di uguale massa è appoggiato sul piano inclinato a fianco del cilindro, dal lato corrispondente alla pendenza crescente come in Figura 5.109. Il cubo è libero di strisciare sul piano inclinato, senza alcun attrito. Tra cubo e cilindro si ha invece attrito dinamico caratterizzato da un coefficiente μ_D e all'occorrenza attrito statico. Discutere il moto del sistema, nelle ipotesi che cubo e cilindro non si possano staccare tra di loro e dal piano. Si utilizzi un modello per l'attrito dinamico descritto dall'equazione

$$\vec{F}_D = -\mu_D \left|\vec{N}\right| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{5.126.1}$$

dove $\vec{F}_D$ è la forza di attrito che agisce su uno dei due corpi in contatto, $\vec{N}$ la reazione normale alla superficie nel punto di contatto e $\vec{v}$ la velocità del corpo considerato relativa al secondo, sempre al punto di contatto.

Soluzione

Scriviamo le equazioni del moto per il cilindro, facendo riferimento alla Figura 5.110. La prima equazine cardinale (nella direzione parallela al piano) e la seconda equazione cardinale (scritta scegliendo il centro del cilindro come polo) si scrivono

$$\begin{aligned} Ma &= N + T + Mg\sin\theta \\ I\alpha &= -F_D R + TR \end{aligned}$$

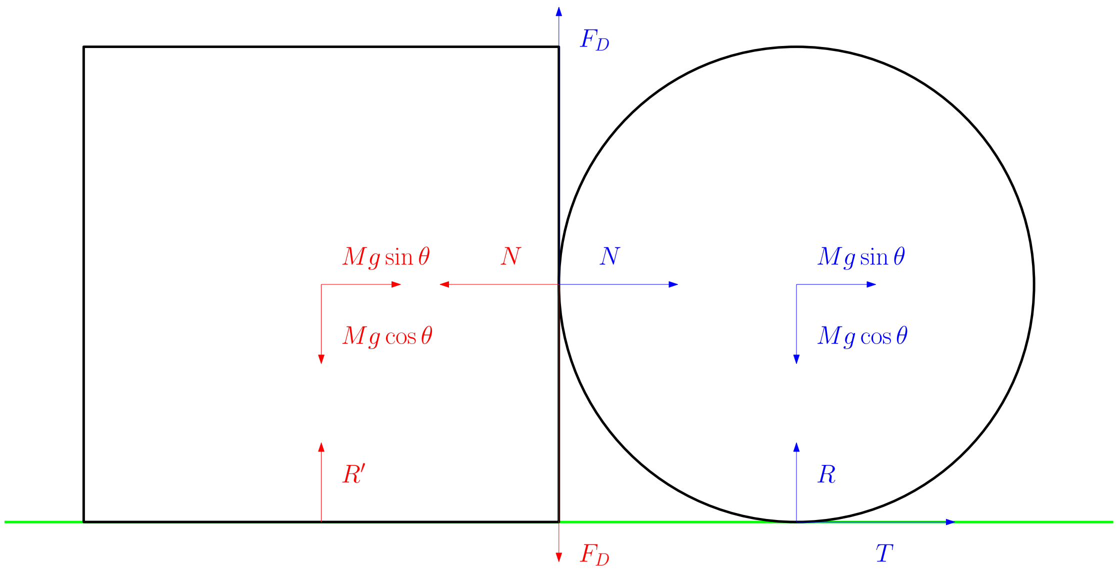

Figura 5.110.: Le forze che agiscono sul cilindro (in blu) e quelle che agiscono sul cubo (in rosso).

Invece la prima equazione cardinale nella direzione parallela al piano per il cubo si scrive

$$Ma = -N + Mg\sin\theta$$

Dobbiamo adesso scrivere esplicitamente F_D. Tenendo conto che la velocità del cilindro relativa al cubo nel punto di contatto vale $-\omega R$ possiamo scrivere

$$F_D = \mu_D |N| \frac{\omega}{|\omega|}$$

Inoltre a causa del vincolo di rotolamento puro abbiamo $a = -\alpha R$ e $v = -\omega R$. Le tre equazioni precedenti diventano

$$\begin{aligned}
Ma &= N + T + Mg\sin\theta \\
-I\frac{a}{R} &= -\mu_D |N| \frac{\omega}{|\omega|} R + TR \\
Ma &= -N + Mg\sin\theta
\end{aligned}$$

Ricaviamo N dalla terza equazione e sostituiamolo nelle precedenti:

$$\begin{aligned}
Ma &= M(g\sin\theta - a) + T + Mg\sin\theta \\
-I\frac{a}{R} &= -\mu_D M |g\sin\theta - a| \frac{\omega}{|\omega|} R + TR \\
N &= M(g\sin\theta - a)
\end{aligned}$$

cc BY NC SA

infine ricaviamo T dalla prima equazione e sostituiamolo nella seconda

$$T = 2M\left(a - g\sin\theta\right)$$
$$a + 2\mu_D\left|a - g\sin\theta\right|\frac{v}{|v|} + 4\left(a - g\sin\theta\right) = 0$$

dove si è tenuto conto che $I = MR^2/2$. Per discutere questa espressione conviene esplicitare μ_D

$$\mu_D = \frac{4g\sin\theta - 5a}{2\left|a - g\sin\theta\right|}\frac{v}{|v|}$$

e rappresentarlo graficamente in funzione di $\frac{a}{g\sin\theta}$ come in Figura 5.111.

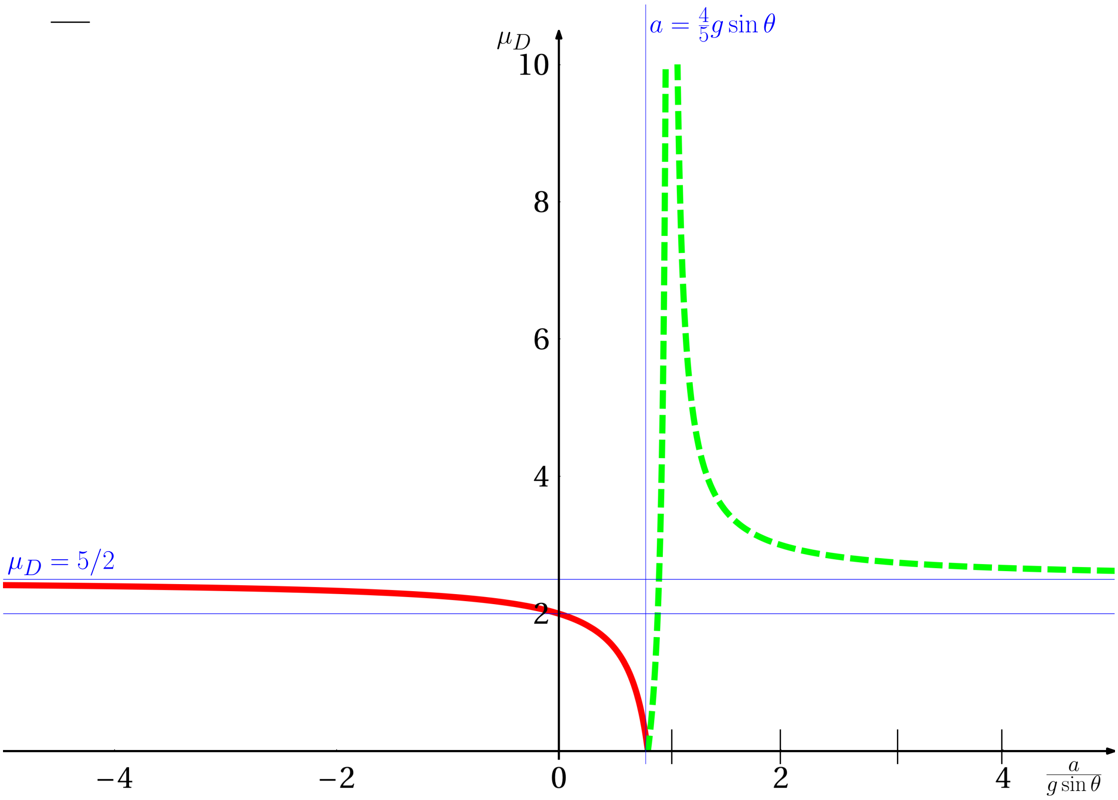

Figura 5.111.: La relazione tra il coefficiente di attrito μ_D e l'accelerazione espressa in unità $g\sin\theta$. Il grafico rosso continuo si riferisce al caso $v > 0$, quello verde tratteggiato al caso $v < 0$.

Le due curve corrispondono al caso $v > 0$ (linea continua rossa) e $v < 0$ (linea tratteggiata verde). Se $v > 0$ abbiamo una soluzione per $\mu_D < 5/2$. In particolare per $0 \le \mu_D < 2$ il sistema si muove con accelerazione positiva costante, per $\mu_D = 2$ si ha un moto a velocità costante e per $2 < \mu_D < 5/2$ l'accelerazione è negativa, di conseguenza

v diminuisce fino ad annullarsi. Quando questo accade il sistema resta in equilibrio: questo è possibile dato che le equazioni divengono

$$\begin{aligned} 0 &= N + T + Mg\sin\theta \\ 0 &= -F_s R + TR \\ 0 &= -N + Mg\sin\theta \end{aligned}$$

da cui otteniamo la forza di attrito statico

$$F_s = -2Mg\sin\theta$$

per la quale la relazione

$$2Mg\sin\theta = |F_s| \le \mu_S |N| = Mg\sin\theta$$

è verificata dato che

$$\mu_s > \mu_D > 2$$

Infine non si hanno soluzioni con $v > 0$ per $\mu_D > 5/2$.

Per $v < 0$ si hanno soluzioni per qualsiasi valore di μ_D, corrispondenti a una accelerazione positiva costante. Il modulo della velocità del sistema diminuisce fino ad annullarsi. A questo punto se $\mu_D > 2$ il sistema resta fermo, altrimenti continua ad accelerare in accordo col caso $v > 0$ visto precedentemente.

La soluzione è unica però solo per $\mu_D \le 5/2$. Per $\mu_D > 5/2$ abbiamo due soluzioni corrispondenti a $N > 0$ (cioè $a < g\sin\theta$) e a (cioè $a > g\sin\theta$).

La soluzione trovata appare ragionevole per (esiste ed è unica), ma problematica per $\mu_D > 5/2$. Il problema considerato può essere visto come un semplice esempio che mostra come il modello di attrito (5.126.1) (legge di Coulomb) sia solo in apparenza semplice, e possa condurre a situazioni paradossali che generalmente appaiono quando si considerano sistemi con corpi rigidi e grandi valori del coefficiente di attrito. Per approfondimenti vedere ad esempio [1].

Bibliografia

[1] Wiercigroch M., Zhilin P.A. On the Painlevé Paradoxes. Proc. of the XXVII e Summer School "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems". St. Petersburg. 2000. P. 1–22.