PROBLEMA 5.127

Masse e molla: identificare un errore ★★

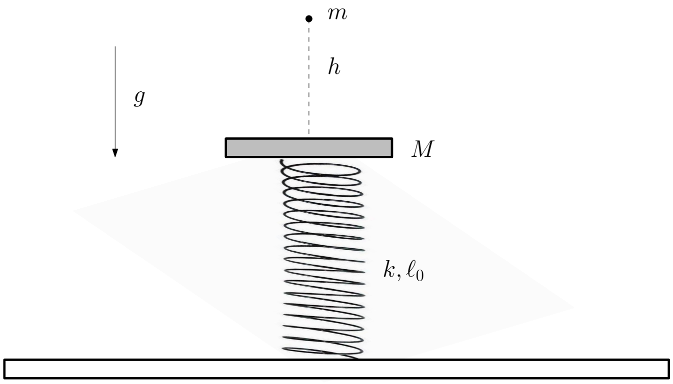

Figura 5.112.: La massa M è inizialmente in equilibrio, la massa m in quiete.

Una massa M è sospesa mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0 al di sopra di un piano, come in Figura (5.112), e si trova inizialmente in equilibrio. Una seconda massa m viene lasciata cadere da ferma, partendo da un punto posto ad una altezza h al di sopra della prima. Le due masse si urtano, e restano attaccate. Successivamente la lunghezza della molla si riduce ulteriormente di

$$\delta = \sqrt{\frac{2m^2 gh}{k(m+M)}}$$

Dimostrate che il risultato precedente è errato. Fatelo senza calcolare il risultato corretto, ma utilizzando un argomento basato su un opportuno caso limite. Infine trovate esplicitamente la risposta giusta.

Soluzione

Si può osservare che la molla si deve abbassare anche nel caso $h = 0$. Infatti anche appoggiando semplicemente la massa m su quella M si aumenta la forza peso che deve essere equilibrata dalla molla, quindi questa si dovrà contrarre. Al contrario il risultato proposto predice $\delta = 0$ in questo caso.

Per trovare il risultato corretto si può usare la conservazione dell'energia, che è solo potenziale sia nella configurazione iniziale (massa m appena lasciata libera) che in quella finale (massima contrazione della molla).

L'energia potenziale si può scrivere in funzione della lunghezza ℓ della molla e della posizione z della massa m come

$$U(\ell, z) = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 + Mg\ell + mgz$$

Il primo termine corrisponde al potenziale della molla, il secondo al potenziale gravitazionale della massa M, in terzo al potenziale gravitazionale della massa m. Inizialmente la molla è in equilibrio, quindi la lunghezza della molla è determinata dal minimo di U rispetto ad ℓ:

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = k\left(\ell - \ell_0\right) + Mg = 0$$

e quindi da

$$\ell = \ell_0 - \frac{Mg}{k}$$

Sostituendo possiamo scrivere l'energia potenziale iniziale nella forma

$$U_i = Mg\ell_0 - \frac{M^2g^2}{2k} + mgh$$

Quella finale varrà

$$U_f = \frac{k}{2}\left(\ell_0 - \frac{Mg}{k} - \delta - \ell_0\right)^2 + (M+m)\,g\left(\ell_0 - \frac{Mg}{k} - \delta\right)$$

Ponendo $U_i = U_f$ e risolvendo per δ otteniamo

$$\delta = \frac{gm}{k} \pm \sqrt{\frac{g^2m^2}{k^2}\left[1 + 2\frac{k}{gm}\left(h - \ell_0 + \frac{Mg}{k}\right)\right]}$$

La soluzione corretta corrisponde al segno positivo, che significa anche $\delta > 0$, dato che

$$h > \ell_0 - \frac{Mg}{k}$$

L'altra soluzione corrisponde invece all'altro valore di δ per il quale la molla si trova in quiete durante l'oscillazione.