PROBLEMA 5.128

Proiettile con attrito viscoso: traiettoria ⋆⋆

Un proiettile di massa m viene lanciato da terra con una velocità iniziale di modulo v_0 che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. Oltre a un campo di gravità costante è presente una forza di attrito viscoso

$$\vec{F} = -\gamma\vec{v}$$

Trovare l'equazione esplicita della traiettoria, e discutere il limite nel quale si può considerare "piccolo" l'attrito, dicendo in modo preciso che cosa si intende con questo.

Soluzione

Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane con origine nella posizione iniziale del proiettile. Scriviamo le equazioni del moto nella direzione orizzontale e verticale. Abbiamo

$$\ddot{x} = -\frac{\gamma}{m}\dot{x} \qquad (5.128.1)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\gamma}{m}\dot{y} - g \qquad (5.128.2)$$

Risolviamo esplicitamente la (5.128.1), cercando soluzioni del tipo

$$x = e^{\lambda t}$$

Sostituendo otteniamo la condizione

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda = 0$$

e quindi i due possibili valori $\lambda = 0$, $\lambda = -\gamma/m$. Abbiamo quindi

$$x = A + Be^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

ed imponendo le condizioni al contorno

$$x(0) = A + B = 0$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\gamma}{m}B = v_{x,0}$$

otteniamo

$$x(t) = \frac{mv_{x,0}}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right] \qquad (5.128.3)$$

Passiamo alla (5.128.2). La soluzione si ottiene aggiungendo alla soluzione generale dell'equazione omogenea (identica alla (5.128.1)) una soluzione particolare. Sappiamo che nel caso considerato questa può corrispondere ad un moto a velocità costante, $y =$

$v_l t$, e sostituendo nella (5.128.2) troviamo $v_l = -mg/\gamma$. Quindi la soluzione generale sarà

$$y = A + Be^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}t$$

Imponiamo ancora una volta le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = 0 \\ \dot{y}(0) &= -\frac{\gamma}{m}B - \frac{mg}{\gamma} = v_{y,0} \end{aligned}$$

da cui

$$y = \frac{m}{\gamma}\left[v_{y,0} + \frac{mg}{\gamma}\right]\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right] - \frac{mg}{\gamma}t \tag{5.128.4}$$

Veniamo adesso alla traiettoria. Possiamo ricavare dalla (5.128.3)

$$1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} = \frac{\gamma x}{m v_{x,0}}$$

e

$$t = -\frac{m}{\gamma}\log\left(1 - \frac{\gamma x}{m v_{x,0}}\right)$$

Sostituendo nella (5.128.4) otteniamo l'equazione desiderata,

$$y = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x + \frac{m^2 g}{\gamma^2}\left[\frac{\gamma x}{m v_{x,0}} + \log\left(1 - \frac{\gamma x}{m v_{x,0}}\right)\right] \tag{5.128.5}$$

Per valori di x tali che

$$\frac{\gamma x}{m v_{x,0}} \ll 1 \tag{5.128.6}$$

possiamo utilizzare l'approssimazione

$$\log(1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

e ottenere

$$y = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_{x,0}^2} + O\left(\frac{\gamma x}{m v_{x,0}}\right)^3$$

cioè la stessa traiettoria valida in assenza di attrito. Per valori maggiori di x il termine logaritmico diventa importante, ed in effetti la traiettoria ha un asintoto verticale per

$$x^* = \frac{m v_{x,0}}{\gamma}$$

L'interpretazione di questo fatto è che a causa dell'attrito il proiettile non supera orizzontalmente il valore $x = x^*$, come d'altra parte è chiaro dalla (5.128.3).

Discutiamo il limite di piccolo attrito. Per x fissato se vale la condizione (5.128.6), che possiamo riscrivere nella forma

$$\gamma \ll \frac{m v_{x,0}}{x}$$

potremo approssimare il logaritmo come in precedenza e ottenere la soluzione priva di attrito. Notiamo però che, per quanto piccolo possa essere γ, per valori sufficientemente grandi di x la traiettoria risulterà comunque fortemente modificata.