PROBLEMA 5.130

Carrello triangolare ★★

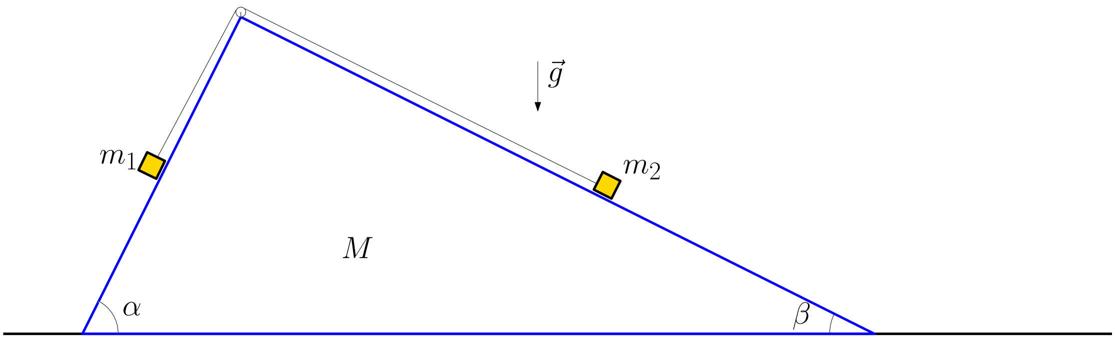

Figura 5.114.: Il carrello triangolare considerato nel problema.

Un carrello di sezione triangolare come in Figura 5.114 (angoli alla base α e β) e di massa M è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito, sul quale è libero di muoversi. Sui piani inclinati che corrispondono a due suoi lati sono appoggiate due masse m_1 e m_2. Queste sono collegate tra loro da un filo inestensibile e privo di massa, e possono scorrere liberamente e senza attriti. Il sistema è immerso in un campo gravitazionale costante: determinare l'accelerazione del carrello. Considerare in particolare il caso $\alpha = \beta$.

Soluzione

Scriviamo l'equazione per il moto orizzontale del carrello. Abbiamo

$$Ma = N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\beta - T\cos\alpha + T\cos\beta \tag{5.130.1}$$

dove N_1, N_2 sono le forze di contatto che le due masse esercitano sul carrello, e T la tensione del filo.

Scriviamo adesso le equazioni del moto per le due masse, nella direzione della normale al piano al quale sono appoggiate. Osserviamo che in tali direzioni le accelerazioni delle masse rispetto al carrello sono nulle, e quindi quelle assolute coincidono con le relative componenti dell'accelerazione del carrello. Quindi

$$\begin{aligned} m_1\left(-a\sin\alpha\right) &= N_1 - m_1 g\cos\alpha \\ m_2\left(a\sin\beta\right) &= N_2 - m_2 g\cos\beta \end{aligned} \tag{5.130.2}$$

Scriviamo le analoghe equazioni per il moto delle due masse nelle direzioni parallele al piano al quale sono appoggiate. Otteniamo

$$\begin{aligned}\left(a\cos\alpha + a^{(r)}_{1\parallel}\right) &= \frac{T}{m_1} - g\sin\alpha \\ \left(a\cos\beta + a^{(r)}_{2\parallel}\right) &= -\frac{T}{m_2} + g\sin\beta\end{aligned}$$

dove $a^{(1)}_{1\parallel}$ e $a^{(2)}_{2\parallel}$ sono le accelerazioni relative al carrello. A causa dell'inestensibilità del filo $a^{(1)}_{1\parallel} = a^{(2)}_{2\parallel}$, possiamo quindi sottrarre membro a membro ottenendo

$$a(\cos\alpha - \cos\beta) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) T - g(\sin\alpha + \sin\beta)$$

ossia

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[a(\cos\alpha - \cos\beta) + g(\sin\alpha + \sin\beta)\right]$$

Sostituiamo la tensione così ottenuta nella (5.130.1) insieme con le espressioni per N_1 e N_2 ricavati dalle (5.130.2), ottenendo l'accelerazione richiesta

$$a = \frac{(m_1\cos\alpha + m_2\cos\beta)(m_1\sin\alpha - m_2\sin\beta)}{M(m_1+m_2) + m_1 m_2(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (m_1+m_2)\left(m_1\sin^2\alpha + m_2\sin^2\beta\right)} g$$

Nel caso $\alpha = \beta$ abbiamo

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\sin\alpha\cos\alpha}{M + (m_1+m_2)\sin^2\alpha} g$$