PROBLEMA 5.131

Sistema a tre corpi: energia nel sistema del centro di massa ⋆

Mostrare che l'energia cinetica per un sistema di tre punti materiali di massa m_1, m_2 e m_3 e velocità $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ può essere scritta nella forma

$$E_c = \frac{1}{2}\left(m_1+m_2+m_3\right)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu_{12}\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_{23}\left(\vec{v}_2-\vec{v}_3\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_{31}\left(\vec{v}_3-\vec{v}_1\right)^2$$

dove

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+m_3\vec{v}_3}{m_1+m_2+m_3}$$

è la velocità del centro di massa e le costanti μ_{12}, μ_{23} e μ_{31} sono funzioni delle masse. Determinare esplicitamente μ_{12}, μ_{23} e μ_{31}.

Soluzione

Sostituendo l'espressione della velocità del centro di massa troviamo

$$\begin{aligned}E_c = {} & \frac{1}{2}\frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+m_3\vec{v}_3\right)^2 \\ & + \frac{1}{2}\mu_{12}\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_{23}\left(\vec{v}_2-\vec{v}_3\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_{31}\left(\vec{v}_3-\vec{v}_1\right)^2\end{aligned}$$

e sviluppando i quadrati

$$\begin{aligned}E_c = {} & \frac{1}{2}\frac{m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2+m_3^2v_3^2+2m_1m_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+2m_2m_3\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3+2m_3m_1\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1}{m_1+m_2+m_3} \\ & + \frac{1}{2}\mu_{12}\left(v_1^2+v_2^2-2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\right) \\ & + \frac{1}{2}\mu_{23}\left(v_2^2+v_3^2-2\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3\right) \\ & + \frac{1}{2}\mu_{31}\left(v_3^2+v_1^2-2\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1\right)\end{aligned}$$

Questa espressione si deve ridurre a

$$E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2$$

quindi i termini misti si devono annullare. Questo da le condizioni

$$\begin{aligned}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2+m_3} &= \mu_{12} \\ \frac{m_2m_3}{m_1+m_2+m_3} &= \mu_{23} \\ \frac{m_3m_1}{m_1+m_2+m_3} &= \mu_{31}\end{aligned}$$

Quello che rimane è

$$\begin{aligned}
E_c = & \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{m_1+m_2+m_3}+\mu_{12}+\mu_{31}\right)v_1^2 \\
& +\frac{1}{2}\left(\frac{m_2^2}{m_1+m_2+m_3}+\mu_{12}+\mu_{23}\right)v_2^2 \\
& +\frac{1}{2}\left(\frac{m_3^2}{m_1+m_2+m_3}+\mu_{23}+\mu_{31}\right)v_3^2
\end{aligned}$$

ma il primo termine tra parentesi si riduce a

$$\frac{m_1^2}{m_1+m_2+m_3}+\mu_{12}+\mu_{31}=\frac{m_1^2+m_1m_2+m_1m_3}{m_1+m_2+m_3}=m_1$$

e similmente gli altri si riducono rispettivamente a m_2 e m_3, per cui la relazione cercata è verificata.