PROBLEMA 5.132

Nastro trasportatore ⋆⋆

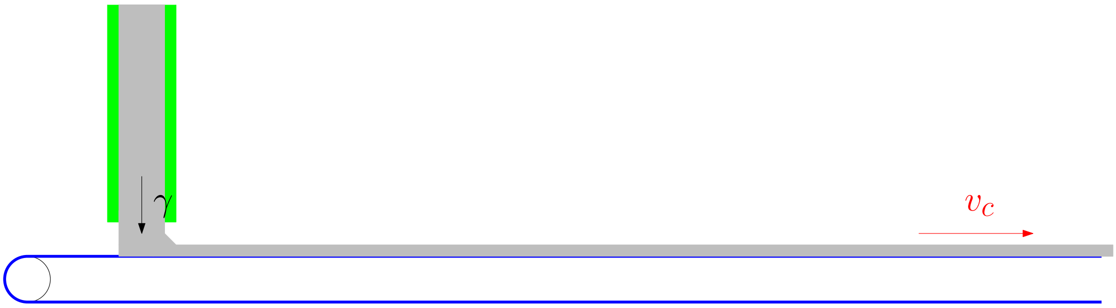

Figura 5.115.: Il nastro trasportatore considerato nel problema. Si può immaginare che la sabbia depositata abbia inizialmente una velocità nulla nella direzione orizzontale.

Su un nastro trasportatore, mantenuto in movimento con velocità costante v_C, viene depositata continuamente della sabbia. La massa di sabbia depositata per unità di tempo è costante e vale

$$\frac{dm}{dt} = \gamma$$

Calcolare la potenza del motore necessaria a mantenere il nastro in movimento.

Soluzione

Consideriamo una quantità Δm di sabbia che cade sul nastro. Il nastro trasportatore eserciterà su di essa una forza $\Delta F(t)$ che la farà accelerare fino a raggiungere la velocità v_c. Questo significa che l'impulso totale esercitato dal nastro sulla massa sarà

$$\Delta I = \int \Delta F(t) dt = \Delta m\, v_c$$

Per il terzo principio la sabbia avrà esercitato una forza uguale e contraria sul nastro, e quindi avrà fatto su di esso un lavoro

$$\Delta \mathcal{L} = -\int \Delta F\, dx = -\int \Delta F v_c dt = -v_c \int \Delta F(t) dt = -\Delta m v_c^2$$

Ma l'energia del nastro trasportatore non varia, quindi questo lavoro deve essere compensato dal lavoro fatto dal motore, che vale quindi

$$\Delta \mathcal{L}_M = \Delta m v_c^2$$

Dividendo per il tempo che è stato necessario ad immettere la massa otteniamo la potenza del motore,

$$P = \frac{\Delta \mathcal{L}_M}{\Delta t} = \gamma v_c^2$$

Possiamo chiederci anche quanta potenza P_{diss} sia stata dissipata in attrito. Dato che l'energia cinetica della massa è aumentata di

$$\Delta\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\Delta m\, v_c^2$$

vediamo che esattamente metà della potenza del motore è dissipata in attrito, dato che

$$P = P_{diss} + \frac{\Delta\mathcal{E}_k}{\Delta t}$$