PROBLEMA 5.133

Propulsione a reazione “istantanea” ⋆⋆

L'equipaggio di un razzo inizialmente fermo vuole aumentare la propria velocità espellendo una massa ηm di gas. La velocità del gas al momento dell'emissione relativa al razzo è sempre $-v_0$. La massa iniziale di quest'ultimo è m e chiaramente $0 < \eta < 1$. Indicheremo con $\mu(t)$ la massa espulsa al tempo t. Calcolate $\mu(t)$ nei due casi seguenti:

1. Tutta la massa viene espulsa istantaneamente a $t = 0$
2. La massa espulsa per unità di tempo è costante, e viene espulsa tutta in un tempo τ

Dette $v_f^{(1)}$ e $v_f^{(2)}$ le velocità finale del razzo nel primo e nel secondo caso, stabilire se è vero che

$$\lim_{\tau \to 0} v_f^{(2)} = v_f^{(1)}$$

Soluzione

Se la massa viene espulsa tutta a $t = 0$ sarà

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \eta m & t > 0 \end{cases}$$

Nel secondo caso avremo invece

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{\eta m}{\tau} t & 0 < t < \tau \\ \eta m & t > \tau \end{cases}$$

Calcoliamo la velocità finale del razzo.

Usando la conservazione della quantità di moto possiamo scrivere

$$[m - \mu(t)]\, v(t) = [m - \mu(t) - d\mu]\, [v(t) + dv] - [v_0 - v(t)]\, d\mu$$

ossia

$$v_0 d\mu = [m - \mu(t)]\, dv \tag{5.133.1}$$

Integrando otteniamo

$$\int_0^{\eta m} \frac{v_0}{m - \mu} d\mu = \int_0^{v_f} dv$$

che da

$$v_f^{(2)} = -v_0 \log(1 - \eta)$$

Questa formula non è però applicabile nel primo caso. Applicando nuovamente la conservazione della quantità di moto abbiamo infatti

$$0 = (m - \eta m)\, v_f^{(1)} - v_0 \eta m$$

da cui

$$v_f^{(1)} = v_0 \frac{\eta}{1 - \eta}$$

Notare che $v_f^{(2)}$ non dipende da τ, di conseguenza

$$\lim_{\tau \to 0} v_f^{(2)} = -v_0 \log(1 - \eta) \neq v_f^{(1)}$$