PROBLEMA 5.134

Perdita di energia di un oscillatore ⋆⋆

Un oscillatore armonico è realizzato mediante una massa m collegata ad una molla di costante elastica k. Inizialmente la massa si trova nella posizione di equilibrio, con velocità v_0. Determinare per quale valore del coefficiente di attrito viscoso λ l'energia totale dell'oscillatore si riduce più rapidamente.

Soluzione

L'equazione del moto dell'oscillatore

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$$

ammette per soluzione generale

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

dove α_1 e α_2 sono le due soluzioni di

$$m\alpha^2 + \lambda\alpha + k = 0$$

che supponiamo per il momento distinte. Imponiamo le condizioni iniziali: abbiamo

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = 0 \\ \dot{x}(0) &= \alpha_1 A + \alpha_2 B = v_0 \end{aligned}$$

Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \\ B &= -\frac{v_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}\right) \\ \dot{x}(t) &= \frac{v_0}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}\right) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'energia troviamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}\left[m\left(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}\right)^2 + k\left(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}\left[\left(\alpha_1^2 + \frac{k}{m}\right)e^{2\alpha_1 t} + \left(\alpha_2^2 + \frac{k}{m}\right)e^{2\alpha_2 t} - 2\left(\alpha_1\alpha_2 + \frac{k}{m}\right)e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}\right] \end{aligned}$$

La parte reale di α_1, è sempre negativa (per $\lambda > 0$), e corrisponderà ad un termine decrescente esponenzialmente. La riduzione più rapida di energia si avrà quindi per il massimo valore di

$$\tau^{-1} = \min\left(-\mathrm{Re}\,\alpha_1, -\mathrm{Re}\alpha_2\right)$$

D'altra parte

$$\alpha_i = -\frac{\lambda}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \equiv -\frac{\lambda}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$$

e quindi

$$\tau^{-1} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2m} & 0 < \lambda < \sqrt{4mk} \\ \frac{\lambda}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} & \lambda > \sqrt{4mk} \end{cases}$$

che ha un massimo per $\lambda = \sqrt{4mk}$, che corrisponde allo smorzamento critico. Si tratta proprio del caso che non abbiamo considerato esplicitamente ($\alpha_1 = \alpha_2$), che però possiamo considerare come limite delle espressioni precedenti. In particolare

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\to 0} E(t) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{2}mv_0^2 & \left[\left(-\frac{\lambda}{2m} \frac{e^{\sqrt{\Delta}t} - e^{-\sqrt{\Delta}t}}{2\sqrt{\Delta}} + \frac{e^{\sqrt{\Delta}t} + e^{-\sqrt{\Delta}t}}{2} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{k}{m} \left(\frac{e^{\sqrt{\Delta}t} - e^{-\sqrt{\Delta}t}}{2\sqrt{\Delta}} \right)^2 \right] e^{-\frac{\lambda}{m}t} \\ = \frac{1}{2}mv_0^2 & \left[\left(1 - \frac{\lambda t}{2m}\right)^2 + \frac{kt^2}{m} \right] e^{-\frac{\lambda}{m}t} \end{aligned}$$

La decrescita non è più esponenziale, ma le conclusioni non cambiano.