PROBLEMA 5.135

Energia di un oscillatore forzato a regime ⋆⋆

Un oscillatore armonico è caratterizzato da una massa m, una costante di richiamo elastica k e un coefficiente di attrito viscoso λ. Supponendo che su di esso sia applicata una forzante periodica

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

e che solo le oscillazioni forzate siano presenti (condizione di regime) calcolare l'energia totale in funzione del tempo,

$$E(t) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} kx^2(t)$$

Soluzione

L'equazione del moto del sistema è

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

La soluzione a regime sarà della forma

$$x = A\cos \omega t + B \sin \omega t$$

dove A e B sono costanti da determinare. Calcolando le derivate prime e seconde e sostituendo troviamo

$$\left(k - m\omega^2\right)\left(A\cos \omega t + B\sin \omega t\right) + \lambda\omega\left(-A\sin \omega t + B\cos \omega t\right) = F_0 \cos \omega t$$

Segue che deve essere

$$\begin{aligned}
\left(k - m\omega^2\right) A + \lambda\omega B &= F_0 \\
\left(k - m\omega^2\right) B - \lambda\omega A &= 0
\end{aligned}$$

Il sistema ha per soluzioni

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\lambda\omega}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \lambda^2\omega^2} F_0 \\
A &= \frac{k - m\omega^2}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \lambda^2\omega^2} F_0
\end{aligned}$$

Scriviamo adesso l'energia, ponendo $\omega_0^2 = k/m$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{m\omega_0^2}{2}\left[\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\left(-A\sin \omega t + B\cos \omega t\right)^2 + \left(A\cos \omega t + B\sin \omega t\right)^2\right] \\
&= \frac{m\omega_0^2}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(A^2 + B^2\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left[\left(A^2 - B^2\right)\cos 2\omega t + 2AB \sin 2\omega t\right]\right\}
\end{aligned}$$

Notiamo un termine costante e un termine oscillante (assente se $\omega = \omega_0$). Sostituendo A e B abbiamo infine

$$
\begin{aligned}
E(t) = \frac{m}{2}\omega_0^2 &\left\{ \frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \right. \\
&\left. +\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left[\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\Gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}\cos 2\omega t + 2\frac{\Gamma\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}\sin 2\omega t\right]\right\} \\
&\times \frac{F_0^2/m^2}{\left(\omega_0^2-m\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}
\end{aligned}
$$

dove $\Gamma = \lambda/m$.