PROBLEMA 5.136

Risposta alla risonanza e fattore di qualità ★★

Un oscillatore armonico caratterizzato da una massa m, una costante di richiamo elastica k e un coefficiente di attrito viscoso λ viene sottoposto ad una forzante periodica

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Detta $A(\omega)$ l'ampiezza di oscillazione a regime, mostrare che il rapporto

$$\frac{A(\omega_r)}{A(0)}$$

dove ω_r è la frequenza di risonanza dell'oscillatore si può scrivere come una funzione del solo fattore di qualità Q.

Soluzione

La soluzione a regime dell'equazione del moto

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

si può scrivere come

$$x_r(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{F_0 e^{i\omega t}}{k - m\omega^2 + \lambda i\omega}\right]$$

ed è dunque una oscillazione di ampiezza ($\omega_0^2 = k/m$)

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}\omega^2}}$$

La frequenza di risonanza si determina calcolando il massimo di questa espressione, che corrisponde al valore di ω^2 che rende minimo il termine al denominatore. Questo si determina da

$$\frac{d}{d\omega^2}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}\omega^2\right] = 2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + \frac{\lambda^2}{m^2} = 0$$

ossia

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{2m^2}$$

Sostituendo troviamo

$$\frac{A(\omega_r)}{A(0)} = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{km}{\lambda^2}} = Q$$