PROBLEMA 5.137

Forzante periodica per $t > 0$ ★★

Un oscillatore armonico caratterizzato da una massa m e da una costante di richiamo elastica k (non c'è attrito) è inizialmente fermo nella posizione di equilibrio. Per $t > 0$ viene sottoposto ad una forzante periodica

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Calcolare l'evoluzione temporale $x(t)$

Soluzione

L'equazione del moto è

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

che ammette come soluzione particolare

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Per ottenere la soluzione generale dobbiamo aggiungere la soluzione generale dell'omogenea. Quindi abbiamo

$$x(t) = \frac{m^{-1}F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

dove abbiamo posto $\omega_0^2 = k/m$. Imponiamo adesso le condizioni iniziali. Abbiamo

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{m^{-1}F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + A = 0 \\ \dot{x}(0) &= B\omega_0 = 0 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A &= -\frac{m^{-1}F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Notare che possiamo prendere il limite $\omega \to \omega_0$. Applicando la regola di de L'Hopital abbiamo

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{F_0}{m} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{F_0}{m} \frac{-t \sin \omega t}{-2\omega} = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

che possiamo interpretare come risposta del sistema forzato alla risonanza.

