PROBLEMA 5.138

Fermare un oscillatore★★

Un oscillatore armonico caratterizzato da una massa m e da una costante di richiamo elastica k (non c'è attrito) si trova inizialmente nella posizione $x = x_0$ con velocità nulla. Detto T il suo periodo di oscillazione, determinare una forza $F(t)$ che può essere applicata per ridurlo in quiete nella posizione di equilibrio per $t > T$.

Soluzione

Dobbiamo trovare una $F(t)$ tale che la soluzione di

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

con le condizioni iniziali specificate si annulli per $t > T$. Una possibile strategia è ottenere $x(T') = 0$ e $\dot{x}(T') = 0$ con $T' < T$, smettendo di applicare la forza successivamente. Dato che dobbiamo imporre due condizioni scegliamo una forza semplice con due parametri liberi, ad esempio (il fattore m è introdotto per convenienza)

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ am\sin\omega t + bm\cos\omega t & 0 < t < T' \\ 0 & t > T' \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il problema

$$m\ddot{x} + kx = am\sin\omega t + bm\cos\omega t$$

Una soluzione particolare è della forma

$$x_p = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}(a\sin\omega t + b\cos\omega t)$$

e quindi la soluzione generale sarà

$$x = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}(a\sin\omega t + b\cos\omega t) + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

con $\omega_0^2 = k/m$. Imponiamo le condizioni iniziali.

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2} + A = x_0 \\ \dot{x}(0) &= \frac{a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + B\omega_0 = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} A &= x_0 - \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ B &= -\frac{\omega}{\omega_0}\frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$x = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(a\sin\omega t + b\cos\omega t\right) + \left(x_0 - \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\cos\omega_0 t - \frac{\omega}{\omega_0}\frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega_0 t$$

Imponiamo adesso le condizioni a $t = T'$. Abbiamo

$$\begin{aligned} x(T') &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(a\sin\omega T' + b\cos\omega T'\right) \\ &+ \left(x_0 - \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\cos\omega_0 T' - \frac{\omega}{\omega_0}\frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega_0 T' = 0 \\ \dot{x}(T') &= \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(a\cos\omega T' - b\sin\omega T'\right) \\ &- \omega_0\left(x_0 - \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\sin\omega_0 T' - \omega\frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega_0 T' = 0 \end{aligned}$$

Questo è un sistema nelle incognite a, b

$$\begin{aligned} \frac{\sin\omega T' - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 T'}{\omega_0 - \omega}a + \frac{\cos\omega T' - \cos\omega_0 T'}{\omega_0 - \omega}b &= -x_0\left(\omega_0 + \omega\right)\cos\omega_0 T' \\ \frac{\cos\omega T' - \cos\omega_0 T'}{\omega_0 - \omega}a + \frac{\frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega_0 T' - \sin\omega T'}{\omega_0 - \omega}b &= \frac{\omega_0}{\omega}\left(\omega_0 + \omega\right)x_0\sin\omega_0 T' \end{aligned}$$

Sarebbe possibile risolvere il sistema in generale, ma per semplificare ulteriormente l'espressione prendiamo il limite $\omega \to \omega_0$, ottenendo

$$\begin{aligned} \left(-\omega_0 T\cos\omega_0 T + \sin\omega_0 T\right)a + \left(\omega_0 T\sin\omega_0 T\right)b &= -2x_0\omega_0^2\cos\omega_0 T \\ \left(\omega_0 T\sin\omega_0 T\right)a + \left(\sin\omega_0 T + \omega_0 T\cos\omega_0 T\right)b &= 2\omega_0^2 x_0\sin\omega_0 T \end{aligned}$$

Inoltre scegliendo $T' = T = 2\pi/\omega_0$ abbiamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega_0^2 x_0}{\pi} \\ b &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$F(t) = \frac{kx_0}{\pi}\sin\omega_0 t \qquad 0 < t < T$$