PROBLEMA 5.139

Molla con massa distribuita I ⋆⋆

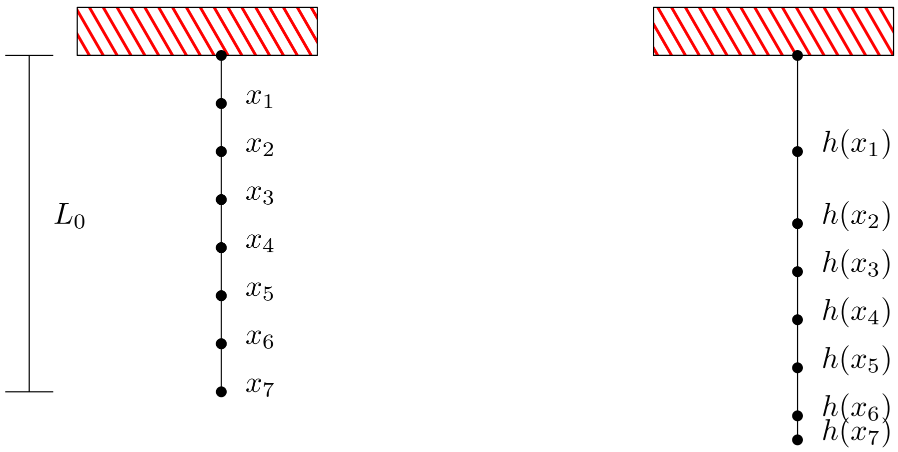

Figura 5.116.: La molla nella configurazione di riposo (a sinistra) e in quella di equilibrio (a destra). Il valore di $h(x)$ corrisponde alla posizione verticale del punto rispetto alla sospensione.

Una molla ha lunghezza a riposo L_0, una costante elastica K e una massa M, uniformemente distribuita. Per avere un modello concreto si può pensare, ad esempio, ad un numero N molto grande di molle, ciascuna di lunghezza L_0/N, costante elastica k e massa $m = MN^{-1}$.

- Quanto vale k in funzione di K e N?

Si appende un suo estremo e si permette all'altro di pendere verticalmente. Sulla molla agisce la forza di gravità. Considerando il limite $N \to \infty$, indichiamo con x la coordinata dell'elemento che si trova ad una distanza x dall'estremo appeso ($0 < x < L_0$, vedere Figura 5.116) in condizioni di riposo. Determinare nella configurazione di equilibrio

- il valore della tensione $T(x)$ lungo la molla;
- la distanza $y(x)$ del punto identificato da x dall'estremo appeso;
- l'allungamento totale della molla e la sua lunghezza.

Soluzione

Per quanto riguarda la costante elastica k di una delle molle componenti, dato che queste sono in serie tra loro ed identiche avremo (vedere l'Esercizio 5.27)

$$\frac{1}{K} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k}$$

e quindi $k = NK$. Per il seguito conviene scrivere la costante di un tratto di elastico molto piccolo, che si ottiene facilmente ponendo $N = L_0/\Delta x$, cioè

$$k = K\frac{L_0}{\Delta x}$$

Calcoliamo adesso la tensione all'equilibrio in funzione di x. Consideriamo il tratto di elastico sottostante al punto identificato da x. Questo avrà una massa

$$m(x) = M\frac{L_0 - x}{L_0}$$

e su di esso agiranno la tensione e la forza peso. All'equilibrio dovremo avere dunque

$$T(x) = Mg\left(1 - \frac{x}{L_0}\right)$$

Per quanto riguarda la lunghezza, consideriamo adesso il tratto di elastico tra il punto x e il punto $x + \Delta x$. Il suo allungamento (la differenza tra la lunghezza a riposo e quella all'equilibrio) sarà dato da

$$\Delta\ell(x) = y(x + \Delta x) - y(x) - \Delta x$$

e dovrà essere legato alla tensione dalla relazione

$$T(x) = k\Delta\ell(x) = KL_0\frac{y(x + \Delta x) - y(x) - \Delta x}{\Delta x}$$

passando al limite $\Delta x \to 0$ si trova

$$T(x) = k\Delta\ell(x) = KL_0\left(\frac{dy(x)}{dx} - 1\right)$$

Possiamo adesso ricavare esplicitamente $y(x)$, riscrivendo l'equazione precedente nella forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{KL_0}T(x) + 1 = \frac{Mg}{KL_0}\left(1 - \frac{x}{L_0}\right) + 1$$

ed integrando troviamo

$$y(x) = \frac{Mg}{KL_0}\left(x - \frac{x^2}{2L_0}\right) + x$$

La costante di intregrazione è stata posta uguale a zero, dato che $y(0) = 0$. Vediamo che la distanza di ogni elemento della molla dal punto di sospensione cresce, e che ponendo $g = 0$ otteniamo $y(x) = x$, come deve essere. La lunghezza della molla sarà data da

$$L = y(L_0) = \frac{Mg}{2K} + L_0$$

e il suo allungamento da

$$\Delta L = L - L_0 = \frac{Mg}{2K}$$

la metà di quello che si otterebbe se tutto la massa fosse concentrata all'estremo inferiore.