PROBLEMA 5.13

Oscillazioni isocrone ⋆⋆⋆

Un punto materiale è vincolato a muoversi in un piano verticale su una guida senza attrito, descritta dall'equazione

$$y = f(x)$$

Determinare $f(x)$ in modo tale che il moto del punto sia una oscillazione armonica di periodo T attorno $x = 0$, indipendentemente dalla sua ampiezza. È possibile ottenere questo per ampiezze comunque grandi? La soluzione è unica?

Soluzione

Supponiamo, senza perdere di generalità, che $f(0) = 0$ e consideriamo $x > 0$. Se prendiamo come coordinata lo spazio percorso lungo la curva possiamo scrivere l'energia totale del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgy(s)\,.$$

Questa deve essere equivalente all'energia totale di un oscillatore armonico, quindi si deve avere

$$y(s) = K^2 s^2\,.$$

Segue che

$$\sqrt{y(u)} = K\int_0^u \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

ossia, derivando,

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{dy}{dx}\right) = K\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.$$

Possiamo risolvere questa equazione scrivendo

$$\frac{1-4K^2y}{4K^2y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

ossia

$$\int_0^{4K^2y(x)}\sqrt{\frac{1-w}{w}}\,dw = 4K^2x\,.$$

Integrando otteniamo la traiettoria nella forma (valida per $4K^2y < 1$)

$$\sqrt{4K^2y(1-4K^2y)} + \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-4K^2y} = 4K^2x\,.$$

Ponendo

$$y = \frac{1}{8K^2}(1-\cos\theta) = \frac{1}{4K^2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

otteniamo

$$x = \frac{1}{8K^2} \left(|\sin\theta| - \theta \right)$$

e dato che siamo interessati a $x > 0$ possiamo scrivere la traiettoria in forma parametrica come

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{8K^2}(1 - \cos\theta) \\ x &= \frac{1}{8K^2}\left(\sin\theta + \theta\right) \end{aligned}$$

per $\theta > 0$. Possiamo interpretare quindi la traiettoria come quella di un punto posto su una circonferenza di raggio $R = \frac{1}{8K^2}$che ruota senza strisciare sotto il piano $y = 2R$. Possiamo ripetere le stesse considerazioni per $x < 0$, ottenendo lo stesso risultato. Avremo quindi una traiettoria complessiva descritta dalle equazioni parametriche precedenti per $-\pi < \theta < \pi$.

Esiste una ampiezza massima per l'oscillazione che si ottiene da

$$y < \frac{1}{4K^2}\,.$$

Si può interpretare fisicamente questo fatto tenendo presente che in una oscillazione armonica si ha una forza di richiamo (tangente alla traiettoria) proporzionale a s. Ma la massima forza di richiamo disponibile nella situazione considerata è mg, corrispondente ad una tangente verticale. Questo accade per $\theta = \pi$.

Infine osserviamo che la soluzione non è unica. Possiamo ad esempio prendere per $x > 0$ e $x < 0$ traiettorie corrispondenti a due diversi valori di K: il moto sarà sia per $x > 0$ che per $x < 0$ un moto armonico, ma con periodi diversi. Il periodo totale sarà la media dei due, e non dipenderà dalla ampiezza dell'oscillazione.