PROBLEMA 5.140

Molla con massa distribuita II ★★

Considerare la molla con massa distribuita descritta nell'Esercizio 5.139. Mostrare che l'accelerazione di un suo elemento generico che si trova in x nella condizione di riposo è descritto dall'equazione

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \mu g + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{5.140.1}$$

dove $\mu = M/L_0$. Usando l'espressione della tensione trovata nell'esercizio precedente mostrare che deve valere

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \chi \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \mu g \tag{5.140.2}$$

e calcolare il valore di χ. Mostrate infine che

$$y(x,t) = F\left(x - vt\right) + G\left(x + vt\right) + \frac{1}{2} g t^2 \tag{5.140.3}$$

dove F e G sono funzioni arbitrarie è soluzione della Equazione (5.140.2) per un opportuno valore della costante v, e determinare quest'ultimo.

Soluzione

Consideriamo l'equazione del moto di un tratto di filo posto tra x e $x + \Delta x$. Per la seconda legge di Newton

$$\left(\frac{M}{L_0}\Delta x\right)\left(\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx\right) = T(x+\Delta x, t) - T(x,t) + \left(\frac{M}{L_0}\Delta x\right) g$$

In questa equazione abbiamo a destra la massa del tratto considerato, moltiplicato per l'accelerazione del suo centro di massa. A destra abbiamo le tensioni agli estremi e la forza peso. Dividendo membro a membro per Δx e passando al limite $\Delta x \to 0$ otteniamo

$$\frac{M}{L_0}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + g\frac{M}{L_0}$$

Derivando l'espressione per la tensione trovata nell'esercizio precedente abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x,t) = K L_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - 1\right) = K L_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

e sostituendo

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - K L_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \mu g \tag{5.140.4}$$

che è l'espressione cercata se $\chi = KL_0$. Verifichiamo per sostituzione che la (5.140.3) è una soluzione. Abbiamo (indichiamo con un apice la derivata di una funzione rispetto al suo argomento)

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 F''(x - vt) + v^2 G''(x + vt) + g \tag{5.140.5}$$

e

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = F''(x - vt) + G''(x + vt)$$

Sostituendo nella (5.140.4) otteniamo

$$v^2 \left[F''(x - vt) + v^2 G''(x + vt)\right] + g - \frac{\chi}{\mu}\left[F''(x - vt) + G''(x + vt)\right] = g$$

che è verificata se $v = \sqrt{\chi/\mu}$.