PROBLEMA 5.143

Pendolo inclinato ⋆⋆

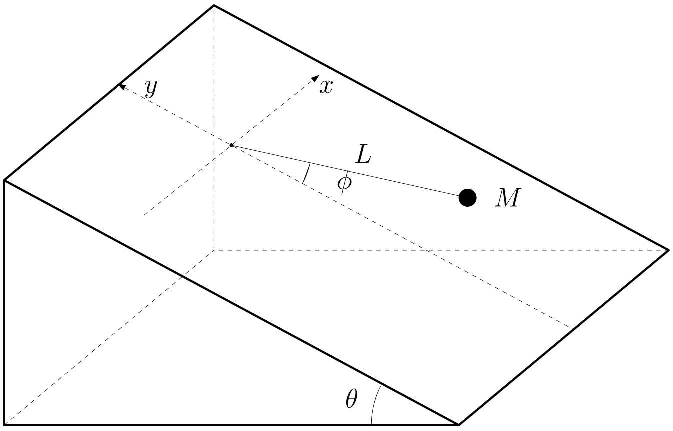

Figura 5.123.: Il pendolo adagiato sul piano inclinato.

Su un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale è fissato un pendolo di massa M e lunghezza L. Inizialmente il pendolo si trova nella posizione di equilibrio e viene lanciato con una velocità iniziale v_0. Tra il piano e la massa M si ha attrito dinamico con coefficiente $\mu_D = 2/\sqrt{3}$. Trovare il valore minimo di v_0 per il quale il pendolo riesce ad effettuare un giro completo.

Soluzione

Usando il sistema di coordinate rappresentato in Figura 5.123 possiamo scrivere

$$y = -L\cos\phi$$

e misurando l'altezza della massa rispetto ad un piano orizzontale passante per l'origine abbiamo

$$h = -L\cos\phi\sin\theta$$

Scriviamo l'energia del pendolo, tenendo conto del potenziale gravitazionale. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2 - MgL\sin\theta\cos\phi$$

Il teorema delle forze vive ci dice che la variazione dell'energia totale è uguale al lavoro della forza di attrito. Quest'ultima vale

$$F_a = \mu_D N$$

dove

$$N = Mg\cos\theta$$

è la reazione normale del piano. Applicando in teorema tra la posizione iniziale e una posizione generica del pendolo abbiamo

$$\frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2 - MgL\sin\theta\cos\phi - \frac{1}{2}Mv_0^2 + MgL\sin\theta = -L\phi\mu_D Mg\cos\theta$$

dalla quale possiamo dedurre $\dot{\phi}^2$ nella posizione generica

Affinchè possa avvenire un giro completo, è necessario che la tensione del filo sia sempre positiva o nulla. Scrivendo l'equazione del moto per la massa nella direzione radiale sul piano inclinato abbiamo

$$-ML\dot{\phi}^2 = -T + Mg\sin\theta\cos\phi$$

da cui

$$T = ML\dot{\phi}^2 + Mg\sin\theta\cos\phi$$

Sostituendo il valore di $\dot{\phi}^2$ trovato precedentemente abbiamo

$$T = 3Mg\sin\theta\cos\phi - 2Mg\sin\theta - 2Mg\phi\mu_D\cos\theta + \frac{Mv_0^2}{L} \geq 0$$

Questo da la condizione

$$3Mg\sin\theta\cos\phi - 2Mg\sin\theta - 2Mg\phi\mu_D\cos\theta + \frac{Mv_0^2}{L} \geq 0$$

Sostituendo esplicitamente i valori di μ_D e θ abbiamo

$$v_0^2 \geq gL\left(1 - \frac{3}{2}\cos\phi + 2\phi\right)$$

Derivando il membro destro vediamo che si tratta di una funzione sempre crescente di ϕ. Il valore massimo su un giro completo è quindi a $\phi = 2\pi$, e troviamo la condizione

$$v_0 \geq \sqrt{gL\left(4\pi - \frac{1}{2}\right)}$$