PROBLEMA 5.144

Orbita circolare perturbata ⋆⋆

Una particella di massa m si muove in un campo di forza centrale descritto da un potenziale $U(r)$. Supponendo che esista un'orbita circolare per $r = r_0$ per un certo valore dell'energia $E_0 = U(r_0)$ e del momento angolare, determinare le caratteristiche dell'orbita corrispondente ad una piccola perturbazione $E = E_0 + \delta E$. In particolare, sotto quali condizioni l'orbita si chiude dopo una rivoluzione?

Soluzione

L'energia e il momento angolare sono conservate. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \\ L &= mr^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

Utilizziamo la seconda equazione per eliminare il parametro temporale dalla prima, ottenendo

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}\right)^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} + U(r)\right] \tag{5.144.1}$$

Introducendo la coordinata $u = r^{-1}$ abbiamo infine

$$\frac{mE}{L^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[u^2 + \frac{2m}{L^2}U\left(u^{-1}\right)\right] \tag{5.144.2}$$

Possiamo adesso sviluppare il potenziale attorno a r_0. Ponendo $u = u_0 + \varepsilon$ abbiamo al secondo ordine

$$\begin{aligned} \frac{m}{L^2}U\left(u_0^{-1}\right) + \frac{m\delta E}{L^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\Bigg[u_0^2 + 2u_0\varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{2m}{L^2}U\left(u_0^{-1}\right) \\ + \frac{2m}{L^2}\frac{dU}{du}\left(u_0^{-1}\right)\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{2m}{L^2}\frac{d^2U}{du^2}\left(u_0^{-1}\right)\varepsilon^2\Bigg] \end{aligned}$$

ma se u_0 corrisponde ad un'orbita circolare il termine $O(\varepsilon)$ si deve annullare

$$u_0 + \frac{m}{L^2}\frac{dU}{du}\left(u_0^{-1}\right) = 0 \tag{5.144.3}$$

e quindi

$$\frac{m\delta E}{L^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{m}{L^2}\frac{d^2U}{du^2}\left(u_0^{-1}\right)\right]\varepsilon^2$$

Derivando rispetto a θ troviamo l'equazione della traiettoria

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} + \left[1 + \frac{m}{L^2}\frac{d^2U}{du^2}\left(u_0^{-1}\right)\right]\varepsilon = 0$$

che ha per soluzione generale

$$\varepsilon = A\cos(k\theta+\phi)$$

con

$$k = \sqrt{1+\frac{m}{L^2}\frac{d^2U}{du^2}\left(u_0^{-1}\right)}$$

L'ampiezza dell'oscillazione si calcola dall'espressione dell'energia:

$$A = \sqrt{\frac{2m\delta E}{L^2k^2}}$$

Dato che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} &= -r^2\frac{d}{dr} = -\frac{1}{u^2}\frac{d}{dr}\\
\frac{d^2}{du^2} &= 2r^3\frac{d}{dr}+r^4\frac{d^2}{dr^2} = \frac{2}{u^3}\frac{d}{dr}+\frac{1}{u^4}\frac{d^2}{dr^2}
\end{aligned}$$

possiamo scrivere anche

$$k = \sqrt{1+\frac{m}{L^2}\left(\frac{2}{u_0^3}U'+\frac{1}{u_0^4}U''\right)}$$

e la (5.144.3) diviene

$$u_0 - \frac{m}{L^2u_0^2}U' = 0 \qquad (5.144.4)$$

da cui

$$k = \sqrt{3+\frac{m}{L^2u_0^4}U''}$$

In generale un'orbita si chiuderà dopo una rivoluzione se k è un numero intero.

Possiamo chiederci se, per particolari potenziali, tutte le orbite perturbate si chiudono in questo modo. Una condizione necessaria è che k sia indipendente da u_0. Se stiamo perturbando un'orbita circolare deve essere anzitutto

$$\frac{m}{L^2u_0^3} = \frac{1}{U'}$$

ed in particolare il potenziale deve essere una funzione crescente di r. Sostituendo nell'espressione di k troviamo

$$k = \sqrt{3+\frac{1}{u_0}\frac{U''}{U'}}$$

Dato che k non deve dipendere da u_0 troviamo

$$\frac{U''}{U'} = \frac{d}{dr}\log U' = \frac{C_1}{r}$$

ossia

$$\begin{aligned}
\log U' &= C_1 \log r + C_2 \\
U' &= A_1 r^{C_1} \\
U &= \frac{A_1}{C_1+1} r^{C_1+1} + C_2
\end{aligned}$$

che corrisponde a

$$k = \sqrt{3 + C_1}$$

Abbiamo quindi

$$C_1 = k^2 - 3$$

Ad esempio per $k = 1$ troviamo

$$U \propto -\frac{1}{r}$$

cioè un potenziale gravitazionale attrattivo. Per $k = 2$

$$U \propto r^2$$

cioè un oscillatore bidimensionale. Come è noto in entrambi i casi tutte le orbite si chiudono dopo una rivoluzione.