PROBLEMA 5.146

Moto circolare in un sistema rotante ⋆⋆

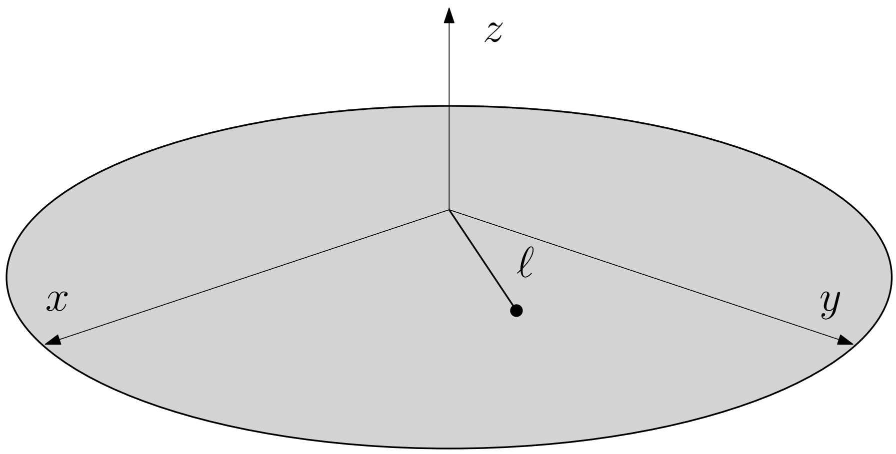

Figura 5.125.: Il punto materiale in moto circolare uniforme. La velocità angolare del moto è ω in un sistema di riferimento inerziale, e viene studiata in un sistema di riferimento che ruota attorno all'asse z con velocità angolare $\overline{\omega}$.

Un punto materiale si muove in un piano orizzontale rimanendo vincolato ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza ℓ come in Figura 5.125. Il moto è quindi circolare, ed avviene a velocità angolare costante ω. Scrivere le equazioni del moto per il punto, in direzione radiale e tangenziale, in un sistema di riferimento che ruota con velocità angolare costante $\overline{\omega}$ attorno ad un asse normale al piano e passante per il centro dell'orbita. Utilizzare le equazioni per determinare la tensione del filo. La tensione del filo dipende da $\overline{\omega}$?

Soluzione

Nel sistema rotante osserviamo un moto circolare che avviene con velocità angolare $(\omega - \overline{\omega})\,\hat{e}_z$, quindi l'unica accelerazione è quella centripeta. Usando coordinate cilindriche, e tenendo conto che il moto è limitato al piano, possiamo scrivere quindi

$$\vec{a} = -\left(\omega - \overline{\omega}\right)^2 \ell \hat{e}_\rho$$

Le forze che agiscono sul punto materiale sono:

1. La forza peso $\vec{F}_p = -mg\hat{e}_z$
2. La reazione normale del piano $\vec{F}_N = N\hat{e}_z$
3. La forza dovuta alla tensione del filo $\vec{F}_T = -T\hat{e}_\rho$

4. La forza centrifuga
$$\vec{F}_{CF} = m\overline{\omega}^2 \ell \hat{e}_\rho$$

5. La forza di Coriolis
$$\vec{F}_{CO} = 2m\overline{\omega}\left(\omega - \overline{\omega}\right)\ell \hat{e}_\rho$$

In conclusione le equazioni del moto per il punto si scrivono

$$m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{F}_N + \vec{F}_T + \vec{F}_{CF} + \vec{F}_{CO}$$

ossia, esplicitamente,

$$-m\left(\omega - \overline{\omega}\right)^2 \ell \hat{e}_\rho = -mg\hat{e}_z + N\hat{e}_z - T\hat{e}_\rho + m\overline{\omega}^2 \ell \hat{e}_\rho + 2m\overline{\omega}\left(\omega - \overline{\omega}\right)\ell \hat{e}_\rho$$

Nella direzione $\hat{e}_z$ questo significa
$$N = mg$$

e nella direzione radiale

$$-m\left(\omega - \overline{\omega}\right)^2 \ell = -T + m\overline{\omega}^2 \ell + 2m\overline{\omega}\left(\omega - \overline{\omega}\right)\ell$$

Svolgendo i calcoli troviamo
$$T = m\ell\omega^2$$

che non dipende dalla velocità di rotazione $\overline{\omega}$ del sistema di riferimento. Questo era da attendersi, dato che la forza dovuta alla tensione non è apparente, e quindi non deve dipendere dal sistema di riferimento scelto.