PROBLEMA 5.147

## Manubrio in orbita ⋆⋆⋆

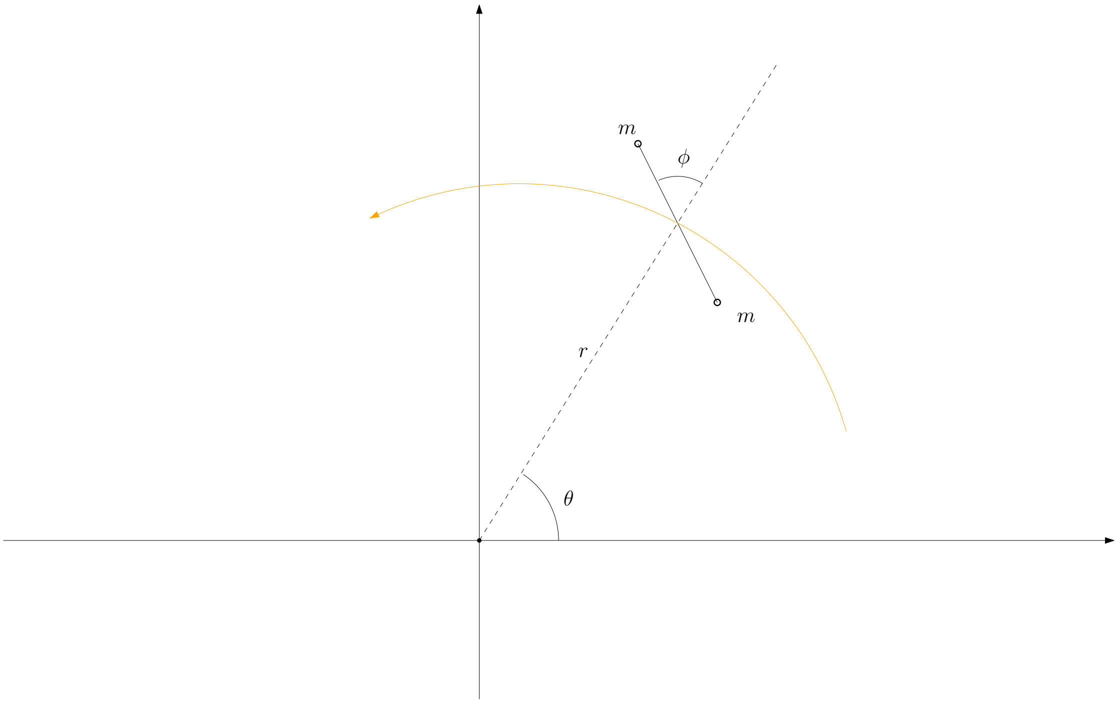


Figura 5.126.: Il manubrio in orbita. Le condizioni iniziali sono scelte in modo da far rimanere entrambe le masse nel piano che contiene l'orbita percorsa dal centro di massa.

Un manubrio formato da due masse identiche $m$ collegate da una sbarra di lunghezza $2a$ e massa trascurabile si muovono sotto l'azione di un campo gravitazionale descritto dal potenziale

$$U = -\frac{km}{r}$$

dove $k$ è una costante positiva e $r$ la distanza dall'origine di un sistema di coordinate scelto opportunamente. Per semplicità le condizioni iniziali sono scelte in modo che entrambe le masse rimangano nel piano dell'orbita percorsa dal centro di massa del sistema.

Scegliendo le coordinate $r$, $\theta$ e $\phi$ come in Figura 5.126 determinare se esistono possibili orbite circolari per il centro di massa, con $\phi$ costante.

### Soluzione

La forza totale che agisce sul manubrio vale

$$\vec{F} = -km\left[\frac{(\vec{r}+\vec{a})}{|\vec{r}+\vec{a}|^3} + \frac{(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}\right]$$

dove $\vec{a}$ è il vettore che unisce il centro di massa del manubrio con uno dei sue estremi,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi\\ 0\end{pmatrix}\\ &= a\cos\phi\hat{e}_r + a\sin\phi\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

ed $\vec{r}$ il vettore posizione del centro di massa del manubrio

$$\vec{r} = r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

Esplicitamente questo significa

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -km\left[\frac{r\hat{e}_r + a\cos\phi\hat{e}_r + a\sin\phi\hat{e}_\theta}{(r^2+a^2+2ar\cos\phi)^{3/2}} + \frac{r\hat{e}_r - a\cos\phi\hat{e}_r - a\sin\phi\hat{e}_\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\phi)^{3/2}}\right]\\ &= -km\left[\frac{r+a\cos\phi}{(r^2+a^2+2ar\cos\phi)^{3/2}} + \frac{r-a\cos\phi}{(r^2+a^2-2ar\cos\phi)^{3/2}}\right]\hat{e}_r\\ &- km\left[\frac{a\sin\phi}{(r^2+a^2+2ar\cos\phi)^{3/2}} - \frac{a\sin\phi}{(r^2+a^2-2ar\cos\phi)^{3/2}}\right]\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

dove abbiamo distinto la componente radiale e la componente tangenziale all'orbita circolare.

Se $r$ e $\phi$ restano costanti, allora sia la forza radiale che quella tangenziale sono costanti. Segue che l'accelerazione centripeta è costante, e quindi il moto circolare deve essere uniforme. D'altra parte questo significa che non si può avere accelerazione tangenziale, e quindi deve essere

$$\left[\frac{1}{(r^2+a^2+2ar\cos\phi)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2+a^2-2ar\cos\phi)^{3/2}}\right]a\sin\phi = 0$$

L'equazione precedente ha soluzioni solo per $\sin\phi = 0$ e per $\cos\phi = 0$, che corrispondono ad un manubrio orientato radialmente e tangenzialmente. Senza perdere generalità data la simmetria del problema possiamo limitarci a studiare i casi $\phi = 0$ e $\phi = \pi/2$.

Dobbiamo ancora verificare che i valori di $\phi$ considerati siano di equilibrio. Per farlo scriviamo la seconda equazione cardinale per il manubrio, rispetto al suo centro di massa. Calcoliamo prima di tutto il momento delle forze: abbiamo

$$
\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{a} \wedge \left( -\frac{km\,(\vec{r}+\vec{a})}{|\vec{r}+\vec{a}|^3} \right) + (-\vec{a}) \wedge \left( -\frac{km\,(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} \right) \\
&= km \left( \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - \frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|^3} \right) (\vec{a} \wedge \vec{r})
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \vec{r} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a\cos(\theta+\phi) & a\sin(\theta+\phi) & 0 \\ r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = ar\left[\cos(\theta+\phi)\sin\theta - \sin(\theta+\phi)\cos\theta\right]\hat{z} \\
&= -ar\sin\phi\hat{z}
\end{aligned}
$$

In conclusione la seconda equazione cardinale si scriverà

$$
\frac{dL_{cm}}{dt} = \vec{M} \cdot \hat{z}
$$

ossia (tenendo conto che in un moto circolare uniforme $\ddot{\theta} = 0$)

$$
\ddot{\phi} = -\frac{rk}{2a} \left[ \frac{1}{(r^2+a^2-2ar\cos\phi)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2+a^2+2ar\cos\phi)^{3/2}} \right] \sin\phi \tag{5.147.1}
$$

Possiamo quindi verificare che il membro destro si annulla sia per $\phi = 0$ che per $\phi = \pi/2$, quindi l'orbita circolare considerata è possibile. Resta da determinare la velocità con la quale viene percorsa l'orbita. Abbiamo

$$
-2m\frac{v^2}{r} = -km \left[ \frac{r+a\cos\phi}{(r^2+a^2+2ar\cos\phi)^{3/2}} + \frac{r-a\cos\phi}{(r^2+a^2-2ar\cos\phi)^{3/2}} \right]
$$

cioè

$$
v^2 = \frac{kr}{2} \left[ \frac{1}{(r+a)^2} + \frac{1}{(r-a)^2} \right] \simeq \frac{k}{r} \left( 1 + 3\frac{a^2}{r^2} \right)
$$

per $\phi = 0$ e

$$
v^2 = \frac{kr^2}{(r^2+a^2)^{3/2}} \simeq \frac{k}{r} \left( 1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2} \right)
$$

per $\phi = \pi/2$. Le approssimazioni valgono per $a \ll r$, e mostrano che l'orbita è percorsa più velocemente quando il manubrio è orientato in direzione radiale.