PROBLEMA 5.149

Moto su un cono in presenza di gravità ⋆⋆⋆

Un punto materiale è vincolato a muoversi su un cono di ampiezza 2α posto con l'asse verticale e il vertice verso il basso. Discutere le possibili traiettorie.

Soluzione

Scegliamo un sistema di coordinate cilindriche con l'origine nel vertice del cono. L'energia del sistema sarà in coordinate cilindriche

$$E = \frac{1}{2}m\left[\left(1+\tan^2\alpha\right)\dot{z}^2 + z^2\tan^2\alpha\dot{\phi}^2\right] + mgz$$

dove si è tenuto conto del fatto che ρ e z sono legati da

$$\rho = z\,\tan\alpha$$

La posizione del punto materiale è determinato da

$$\vec{r} = z\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho$$

e le forze ad esso applicate valgono

$$\vec{F} = -mg\hat{e}_z + N\left(-\cos\alpha\hat{e}_\rho + \sin\alpha\hat{e}_z\right)$$

dove il primo termina è la forza peso e il secondo la reazione normale alla superficie. Quindi il momento non ha componenti lungo $\hat{e}_z$

$$\begin{aligned}\hat{e}_z\cdot\vec{M} &= \hat{e}_z\cdot\left(\vec{r}\wedge\vec{F}\right) = \hat{e}_z\cdot\left[\left(z\hat{e}_z+\rho\hat{e}_\rho\right)\wedge\left(-mg\hat{e}_z + N\sin\alpha\hat{e}_z - N\cos\alpha\hat{e}_\rho\right)\right]\\ &= \hat{e}_z\cdot\left[-Nz\cos\alpha\hat{e}_z\wedge\hat{e}_\rho + \rho\left(-mg+N\sin\alpha\right)\hat{e}_\rho\wedge\hat{e}_z\right] \propto \hat{e}_z\cdot\left(\hat{e}_\rho\wedge\hat{e}_z\right) = 0\end{aligned}$$

Quindi la componente z del momento angolare si conserva, e possiamo scrivere

$$L_z = m\rho^2\dot{\phi}$$

Eliminando $\dot{\rho}$, $\dot{\phi}$ nell'energia otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\left(1+\tan^2\alpha\right)\dot{z}^2 + \frac{L_z^2}{2mz^2\tan^2\alpha} + mgz$$

Il potenziale effettivo ha un minimo in

$$z = \left(\frac{L_z^2}{gm^2\tan^2\alpha}\right)^{1/3}$$

che corrisponde ad un'orbita circolare. Dato che $\lim_{z\to 0} U_{eff} = +\infty$ e $\lim_{z\to+\infty} U_{eff} = +\infty$ tutte le orbite sono limitate. Il caso $L_z = 0$ è speciale, il potenziale efficace si riduce a mgz e le orbite si riducono a cadute nel centro del tipo

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0\\ z &= z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}\frac{g}{1+\tan^2\alpha}t^2\end{aligned}$$

