PROBLEMA 5.14

Catena che cade ⋆⋆

Un filo perfettamente flessibile, di massa m e lunghezza ℓ è vincolato a muoversi sulla superficie in Figura 5.6, e pende inizialmente verticalmente per un tratto x_0. Determinare il suo moto.

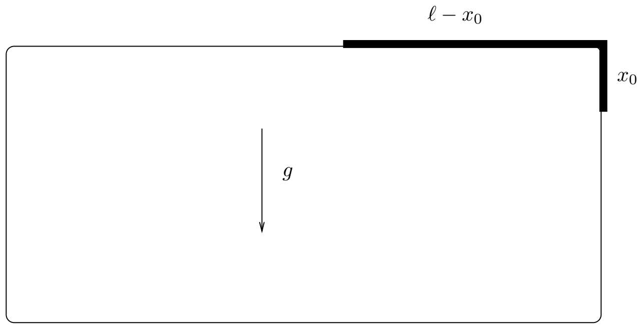

Figura 5.6.: Il filo nella sua posizione iniziale.

Soluzione

Detta x la lunghezza del tratto verticale della catena possiamo scrivere l'energia cinetica del sistema nella forma

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

e l'energia potenziale gravitazionale come

$$U = -\left(m\frac{x}{\ell}\right) g \left(\frac{x}{2}\right)$$

dove il termine nella prima parentesi è la massa del tratto verticale, e quello nella seconda la posizione verticale del centro di massa rispetto al piano orizzontale. L'energia totale sarà

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{mg}{\ell}x^2$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} - \frac{mg}{\ell}x\dot{x} = \dot{x}\left(m\ddot{x} - \frac{mg}{\ell}x\right) = 0$$

da cui l'equazione del moto

$$\ddot{x} - \frac{g}{\ell}x = 0 \tag{5.14.1}$$

Questa è un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti, cerchiamo quindi soluzioni della forma

$$x = e^{\alpha t} \tag{5.14.2}$$

Sostituendo la (5.14.2) nella (5.14.1) troviamo l'equazione

$$\alpha^2 = \frac{g}{\ell}$$

da cui la soluzione generale

$$x = Ae^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}}t}$$

Imponiamo le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = x_0 \\ v(0) &= \sqrt{\frac{g}{\ell}}(A - B) = 0 \end{aligned}$$

da cui $A = B = x_0/2$. Quindi

$$x = x_0 \cosh \sqrt{\frac{g}{\ell}} t\,.$$