PROBLEMA 5.151

Monopolo I ⋆⋆⋆

Un punto materiale si muove nello spazio sotto l'azione di una forza della forma

$$\vec{F} = \frac{g}{r^3}\vec{v} \wedge \vec{r} \tag{5.151.1}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione e $\vec{v}$ il vettore velocità. Mostrare che l'energia cinetica del punto si conserva, ma non il momento angolare $\vec{L}$. Trovare quindi un vettore $\vec{J}(\vec{v}, \vec{r})$ conservato. Calcolare infine la quantità

$$W = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{J}$$

e trarne delle conseguenze riguardo alle caratteristiche delle orbite.

Soluzione

L'energia cinetica si conserva perché la forza è perpendicolare alla velocità, e quindi non è in grado di fare lavoro. Esplicitamente

$$\begin{aligned} dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \frac{g}{r^3}(\vec{v} \wedge \vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{g}{r^3}\left(d\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \cdot \vec{r} = 0 \end{aligned}$$

Per il momento angolare abbiamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \frac{g}{r^3}\vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{r})$$

Se scomponiamo la velocità in una componente parallela a $\vec{r}$ (radiale) e una componente perpendicolare

$$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$$

abbiamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \frac{g}{r}\vec{v}_\perp \tag{5.151.2}$$

che non si annulla, a meno che $\vec{v}_\perp = 0$. D'altra parte la derivata del versore radiale $\hat{r} = \vec{r}/r$ vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} &= \frac{\vec{v}}{r} - \frac{1}{r}\hat{r}\dot{r} \\ &= \frac{1}{r}(\vec{v} - \vec{v}_\parallel) \\ &= \frac{\vec{v}_\perp}{r} \end{aligned}$$

e quindi possiamo scrivere la (5.151.2) nella forma

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = g\frac{d}{dt}\hat{r}$$

ossia

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L} - g\hat{r}\right) = 0$$

Di conseguenza il vettore

$$\vec{J} = \vec{L} - g\hat{r}$$

si conserva. Da notare che $J^2 = L^2 + g^2$ e quindi anche il modulo del momento angolare è conservato. Inoltre

$$W = \hat{r} \cdot \vec{J} = m\hat{r} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{v}) - g = -g$$

è costante. Questo significa che l'angolo tra il vettore posizione e $\vec{J}$ si mantiene fissato, in altre parole l'orbita avviene su un cono con l'asse lungo $\vec{J}$ e semiapertura angolare α data da

$$\cos\alpha = \frac{\hat{r} \cdot \vec{J}}{\left|\vec{J}\right|} = -\frac{g}{\sqrt{L^2 + g^2}}$$

con vertice nell'origine. Notare che se $L \gg g$ abbiamo $\alpha \simeq \pi/2$ e il cono si riduce a un piano.