PROBLEMA 5.152

Monopolo II ⋆⋆

Nell'Esercizio 5.151 si è visto che la traiettoria di una particella sottoposta alla forza (5.151.1) giace su un cono. Scegliendo il sistema di riferimento in modo da avere

$$\vec{J} = -J\hat{z}$$

con $J > 0$ ed utilizzando opportune coordinate (ad esempio, coordinate polari o cartesiane per la proiezione della posizione della particella nel piano perpendicolare a $\vec{J}$) studiare in dettaglio il moto della particella.

Soluzione

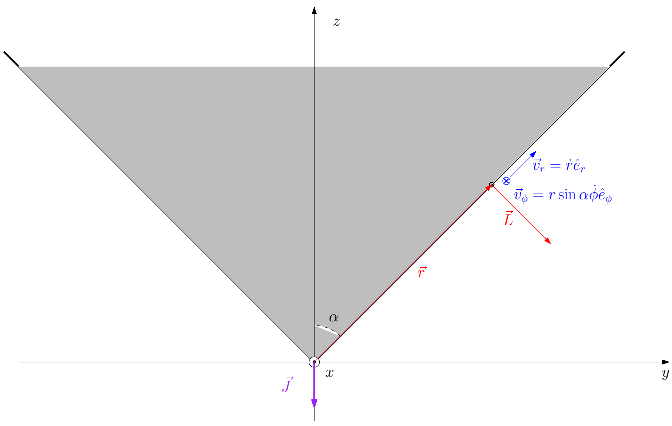

Figura 5.127.: Il sistema di riferimento utilizzato.

Abbiamo visto nell'esercizio precedente che il modulo del momento angolare $\vec{L}$ si conserva. Inoltre $\vec{L}$ è perpendicolare alla superficie del cono sul quale si svolge il moto, e quindi anche la sua proiezione sull'asse z s conserva. Possiamo utilizzare come equazioni del moto leggi di conservazione dell'energia cinetica e di L_z, che possiamo scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\sin^2\alpha\dot{\phi}^2 &= E \\ mr^2\sin^2\alpha\dot{\phi} &= L_z \end{aligned}$$

Ricavando $\dot{\phi}$ dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima abbiamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}$$
$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{mr^2\sin^2\alpha}$$

e vediamo che il problema è formalmente identico a quello del moto di una particella vincolata al cono. Si tratta di un caso particolare del problema 5.106 (oppure del 5.149) in assenza di gravità. Possiamo quindi ripetere analoghe considerazioni: in particolare se tagliamo e incolliamo il cono su un piano, vedremo le orbite come linee rette.

Approfittiamone per verificare questo fatto con un altro procedimento, e otteniamo esplicitamente le leggi orarie. Introduciamo le coordinate

$$\begin{aligned} X &= r\cos\left(\phi\sin\alpha\right) \\ Y &= r\sin\left(\phi\sin\alpha\right) \end{aligned}$$

che possono essere interpretate come coordinate cartesiane sul cono tagliato e incollato sul piano. Le relazioni inverse sono

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2+Y^2} \\ \phi &= \frac{1}{\sin\alpha}\arctan\frac{Y}{X} \end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo troviamo

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{X\dot{X}+Y\dot{Y}}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{\sin\alpha}\frac{X\dot{Y}-Y\dot{X}}{X^2+Y^2} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'energia e nel momento angolare troviamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\frac{\left(X\dot{X}+Y\dot{Y}\right)^2}{X^2+Y^2}+\frac{1}{2}m\frac{\left(X\dot{Y}-Y\dot{X}\right)^2}{X^2+Y^2} \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right) \\ \frac{L_z}{\sin\alpha} &= L_z' = m\left(X\dot{Y}-Y\dot{X}\right) \end{aligned}$$

cioè le espressioni di una particella libera. Derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ha per soluzione

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= 0 \\ \ddot{Y} &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} X &= C_1 + C_2 t \\ Y &= C_3 + C_4 t \end{aligned}$$

dove le costanti C_i devono essere determinate imponendo le condizioni iniziali. Occorre ricordare che il cono non ricopre tutto il piano. Ad ogni modo possiamo ora scrivere esplicitamente la soluzione

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{(C_1 + C_2 t)^2 + (C_3 + C_4 t)^2} \\ \phi(t) &= \frac{1}{\sin\alpha} \arctan \frac{C_3 + C_4 t}{C_1 + C_2 t} \end{aligned}$$