

PROBLEMA 5.153

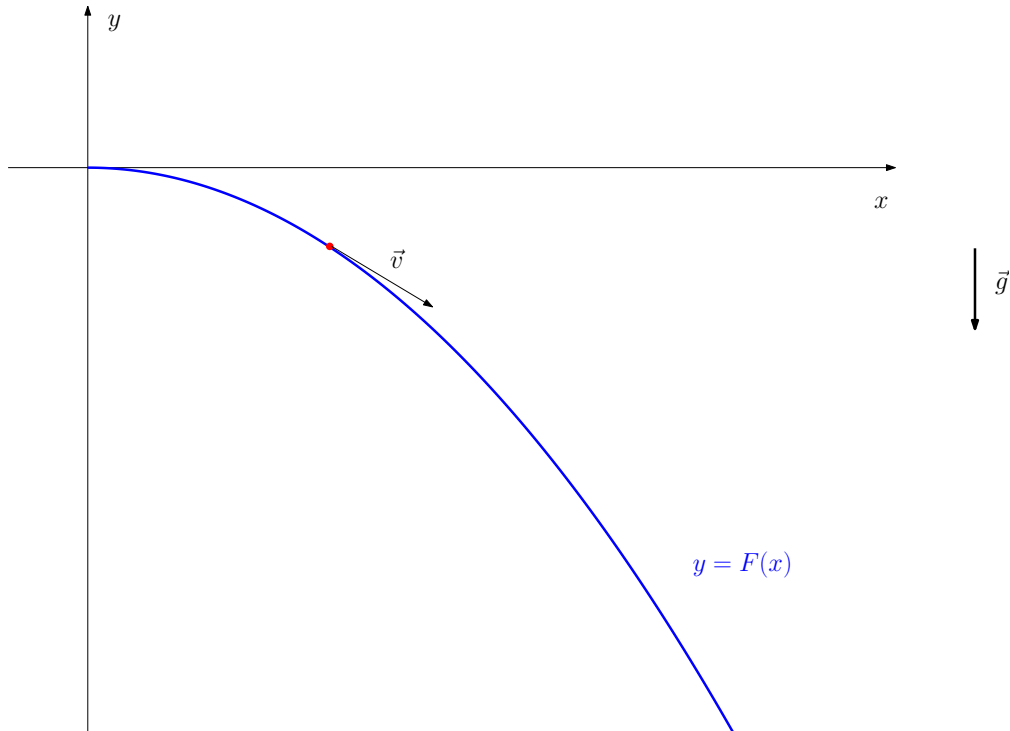
**Isocrona di Bernoulli \*\***

Figura 5.128.: Il punto materiale e il profilo considerato. Si è scelto il sistema di coordinate in modo che il punto di partenza sia nell'origine. La curva disegnata è solo a titolo di esempio, ed anzi si può capire sulla base di considerazioni qualitative che non è sicuramente quella cercata.

Una particella di massa  $m$  scivola su un profilo privo di attrito come in Figura 5.128, sotto l'azione della forza di gravità. La forma del profilo

$$y = F(x)$$

è tale che la componente verticale della velocità rimane costantemente identica al suo valore iniziale.

- Per quale motivo il profilo di esempio in Figura 5.128 non può essere quello giusto?
- Determinare la forma corretta del profilo.

**Soluzione**

Osserviamo prima di tutto che la curva in Figura 5.128 ha la concavità rivolta verso il basso. Questo significa che, se la componente verticale della velocità deve rimanere

costante, quella orizzontale deve diminuire. Infatti

$$\dot{y} = F'(x)\dot{x}$$

e quindi

$$\dot{x} = \frac{\dot{y}}{F'(x)}$$

ma  $F'(x)$  è una funzione crescente. Il modulo della velocità di conseguenza diminuisce nel tempo, ma questo è impossibile perché mano a mano che la particella scende verso il basso dovrebbe aumentare la propria energia cinetica. Per questo ci attendiamo che la curva corretta abbia la concavità rivolta verso l'alto.

Per determinare quest'ultima conviene scrivere

$$x = G(y)$$

dove  $G$  è la funzione inversa di  $F$ . Scriviamo adesso l'energia totale, che deve conservarsi, nella forma

$$E = \frac{1}{2}m [1 + G'(y)^2] \dot{y}^2 + mgy$$

dove  $G'$  indica la derivata di  $G$  rispetto al suo argomento. Dato che  $\dot{y} = v_y = \text{costante}$  possiamo anche scrivere

$$\frac{1}{2}m [1 + G'(0)^2] v_y^2 = \frac{1}{2}m [1 + G'(y)^2] v_y^2 + mgy$$

e in conclusione

$$\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{G'(0)^2 - \frac{2gy}{v_y^2}}$$

Questa è un'equazione differenziale per la funzione  $x = G(y)$  che si integra direttamente, tenendo conto del fatto che  $G(0) = 0$  nel sistema di riferimento scelto. Otteniamo quindi

$$x = \pm G'(0) \int_0^y \sqrt{1 - \frac{2gu}{v_y^2 G'(0)^2}} du$$

L'integrale si può calcolare per tutti i valori di  $y$  tali che

$$y < \frac{v_y^2 G'(0)^2}{2g}$$

otteniamo quindi una serie di curve

$$x = \pm \frac{v_y^2}{3g} \left[ G'(0)^3 - \left( G'(0)^2 - \frac{2g}{v_y^2} y \right)^{3/2} \right] \quad (5.153.1)$$

che soddisfano le proprietà richieste. Se adesso riscriviamo la relazione precedente nella forma

$$\frac{3g}{v_y^2} \left( x \mp \frac{v_y^2}{3g} G'(0)^3 \right) = \pm \left( \frac{2g}{v_y^2} \right)^{3/2} \left( \frac{v_y^2}{2g} G'(0)^2 - y \right)^{3/2}$$

vediamo che abbiamo a che fare in realtà sempre con la stessa curva di base, ad esempio quella ottenuta per  $G'(0) = 0$

$$\frac{3g}{v_y^2} x = \pm \left( \frac{2g}{v_y^2} \right)^{3/2} (-y)^{3/2}$$

alla quale è stata applicata la traslazione più generale che continua a farla passare per l'origine, come potevamo attenderci a priori.

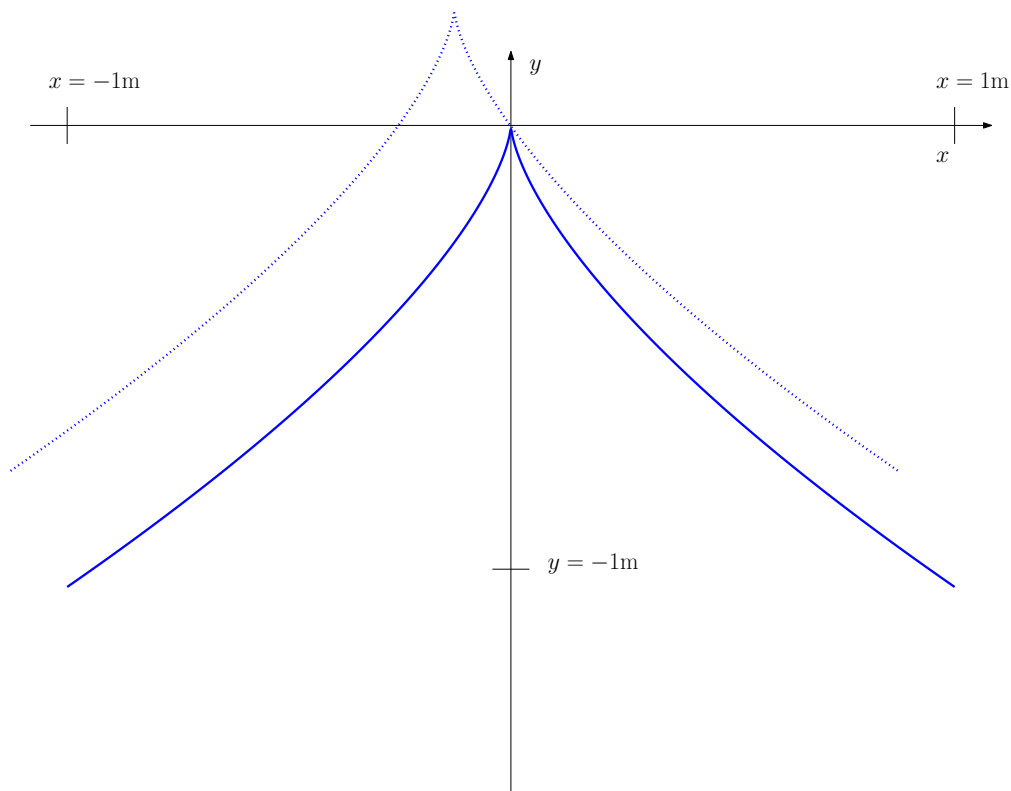


Figura 5.129.: La forma corretta del profilo (curva continua), data dall'Equazione (5.153.2) prendendo  $v_y^2/g = 1m$ . La curva più generale (5.153.1) si può ottenere applicando a questa una traslazione arbitraria che però continui a farla passare per l'origine. Un esempio è la curva tratteggiata.

La curva di base considerata si può riscrivere più semplicemente come

$$\frac{y}{\lambda} = -\frac{1}{2} \left( 3 \frac{|x|}{\lambda} \right)^{2/3} \quad (5.153.2)$$

dove  $\lambda = v_y^2/g$ , ed è rappresentata in Figura 5.129 per  $\lambda = 1\text{m}$ . Si può verificare che, come ci aspettavamo, la concavità è adesso rivolta verso l'alto. Dalla (5.153.1)

Possiamo infine svincolarci dalla particolare scelta fatta per il sistema di coordinate, ed affermare che si potrà ottenere il profilo più generale con le proprietà volute applicando alla curva in Figura 5.129 una trasformazione di scala del fattore  $\lambda$  desiderato e una traslazione arbitraria.