PROBLEMA 5.154

Oscillazioni in un potenziale★★

Una particella di massa m si muove in una dimensione soggetta ad un potenziale

$$U(x) = \begin{cases} \frac{kx^2}{2} + \beta x & x > 0 \\ \frac{kx^2}{2} - \beta x & x < 0 \end{cases}$$

dove k e β sono costanti positive di opportune dimensioni e x è la coordinata cartesiana della particella.

Calcolare il periodo dell'oscillazione risultante, in funzione dell'energia totale E. Considerare in particolare il caso $E \to 0$ e $E \to \infty$.

Soluzione

Per $x > 0$ il potenziale è equivalente a quello di una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, fissata nel punto

$$x = -\frac{\beta}{k}$$

e per $x < 0$ a quello di una molla identica, ma fissata nel punto

$$x = \frac{\beta}{k}$$

Di conseguenza in ciascuna regione la particella compierà un tratto di una oscillazione armonica. Se poniamo come condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $v(0) = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ data la simmetria il periodo sarà il doppio della durata del moto in $x > 0$.

La soluzione generale dell'equazione del moto per $x > 0$ sarà

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{\beta}{k}$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$.

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= A - \frac{\beta}{k} = 0 \\ \dot{x}(0) &= B\omega = \sqrt{\frac{2E}{m}} \end{aligned}$$

e quindi

$$x(t) = \frac{\beta}{k}(\cos\omega t - 1) + \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\sin\omega t$$

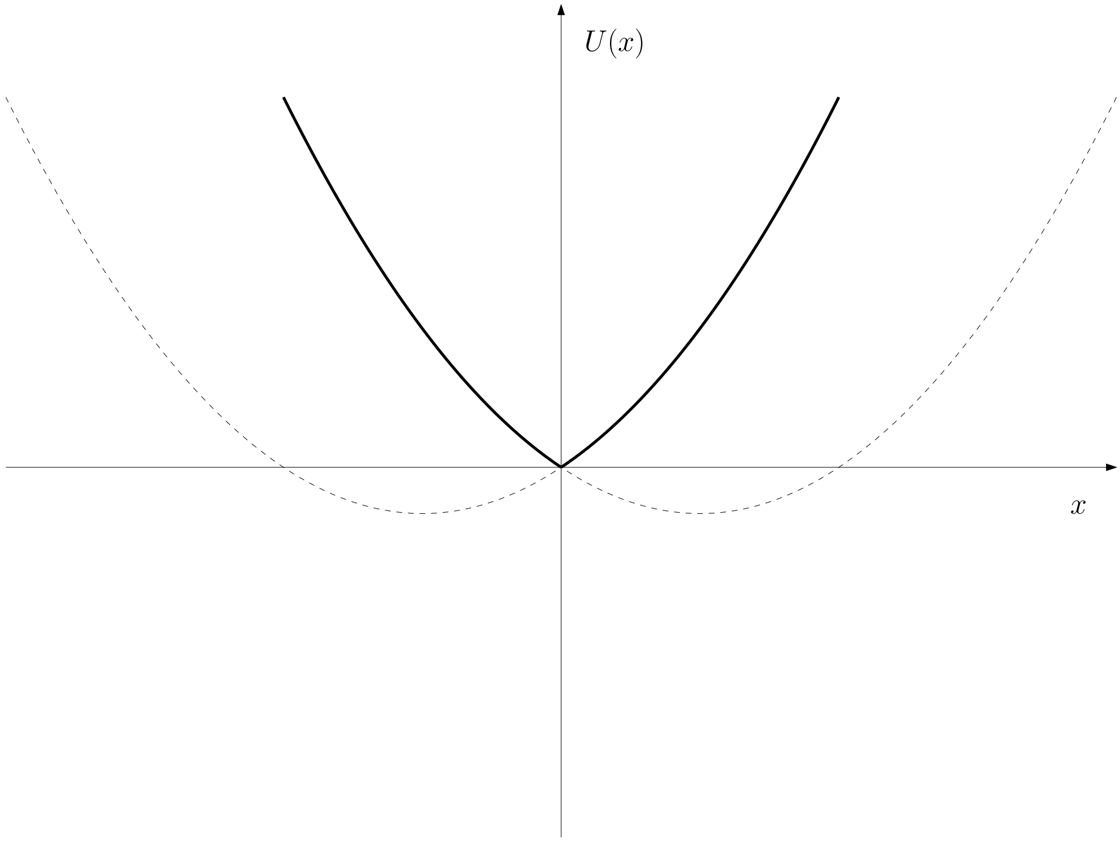

Figura 5.130.: Il grafico del potenziale $U(x)$ considerato nel problema, tracciato con una linea continua. Sono stati tracciati anche i due potenziali quadratici che coincidono con esso per $x > 0$ e $x < 0$.

Determiniamo dopo quanto tempo la particella torna in $x = 0$. Scriviamo l'equazione $x(t) = 0$ nella forma

$$\left(-\frac{2\beta}{k}\sin\frac{\omega t}{2} + \frac{2}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\frac{\omega}{2}t\right)\sin\frac{\omega}{2}t = 0$$

Abbiamo ovviamente la soluzione $t = 0$. Ci interessa la seconda, che si ottiene quando si annulla l'espressione tra parentesi. Otteniamo

$$\tan\frac{\omega t}{2} = \frac{k}{\omega\beta}\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

ossia

$$t = \frac{2}{\omega}\arctan\left(\frac{k}{\omega\beta}\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)$$

In conclusione avremo per il periodo

$$T(E) = \frac{4}{\omega} \arctan\left(\frac{k}{\omega\beta}\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)$$

Per piccoli valori dell'energia

$$E \ll \frac{m\omega^2\beta^2}{2k^2}$$

possiamo utilizzare l'approssimazione $\arctan x \simeq x$ e otteniamo

$$T(E) \simeq \frac{4k}{\omega^2\beta}\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

e quindi $T(E) \propto \sqrt{E}$. Nel limite opposto di grande energia possiamo approssimare $\arctan x \simeq \pi/2$ e otteniamo

$$T(E) = \frac{2\pi}{\omega}$$

cioè il periodo di un oscillatore armonico di massa m e costante elastica k.