Soluzione

PROBLEMA 5.157

Una perlina su un anello rotante ⋆⋆

Una guida circolare di raggio R ruota attorno ad uno dei suoi diametri, posto in direzione verticale, con una velocità angolare costante ω. Sulla guida è vincolata una piccola massa m che può scorrere senza attrito.

- Determinare le possibili posizioni di equilibrio per la massa relativamente alla guida, al variare di ω.
- Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alle posizioni di equilibrio stabile.

Soluzione

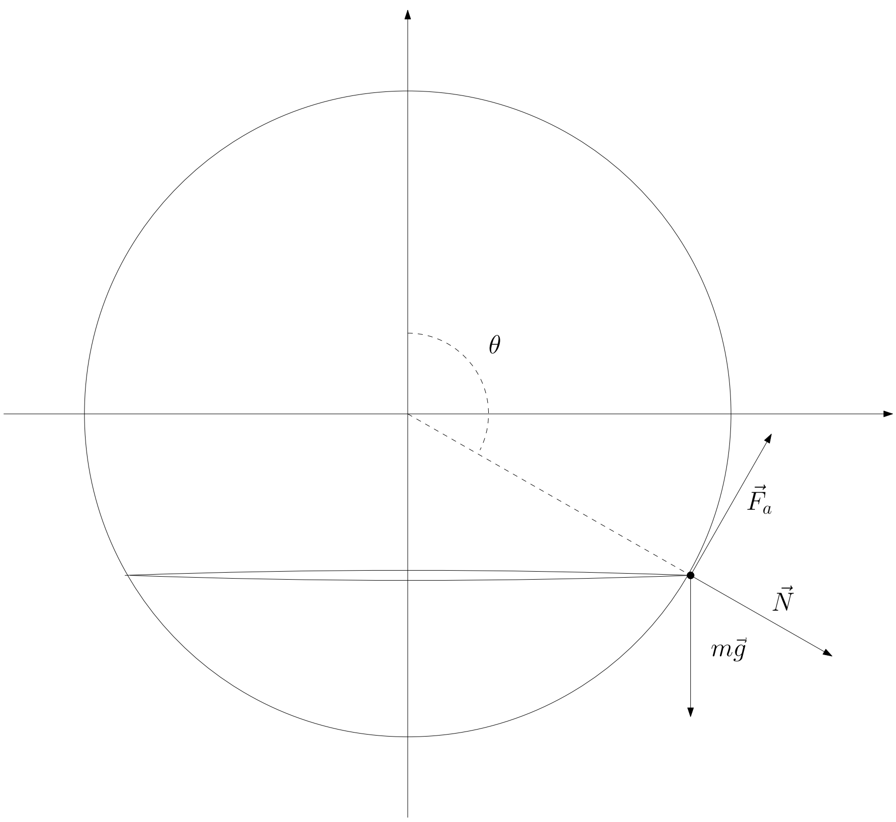

Figura 5.132.: La traiettorie della perlina in equilibrio rispetto alla guida rotante.

In assenza di attrito la particella si muove su una circonferenza orizzontale di raggio $R\sin\theta$ con velocità angolare costante (Figura 5.132). Scrivendo l'equazione del moto nella direzione normale alla traiettoria avremo quindi

$$-m\omega^2 R\sin\theta = N\sin\theta$$

e in direzione verticale

$$N\cos\theta - mg = 0$$

da cui

$$\sin\theta\left(\omega^2 R\cos\theta + g\right) = 0$$

Troviamo quindi come posizioni di equilibrio $\theta = \pm\pi$ e

$$\cos\theta = -\frac{g}{\omega^2 R}$$

Quest'ultima soluzione sarà valida per $\omega^2 \geq g/R$.

Scegliamo coordinate sferiche per descrivere la posizione dell'anello. Avremo in particolare

$$\vec{r} = R\hat{e}_r$$

e derivando otterremo la velocità

$$\vec{v} = R\frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

e l'accelerazione

$$\vec{a} = R\frac{d^2\hat{e}_r}{dt^2}$$

Ma in coordinate sferiche vale

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi = \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \omega\sin\theta\hat{e}_\phi$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\dot{\phi}$ è la velocità angolare di rotazione della guida attorno al suo diametro. Derivando ancora troviamo

$$\begin{aligned}\frac{d^2\hat{e}_r}{dt^2} &= \ddot{\theta}\hat{e}_\theta - \dot{\theta}^2\hat{e}_r + \dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\hat{e}_\phi + \omega\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_\phi + \omega\dot{\phi}\sin\theta\left(-\hat{e}_r\sin\theta - \hat{e}_\theta\cos\theta\right)\\ &= \left(\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{e}_\theta - \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right)\hat{e}_r + 2\omega\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_\phi\end{aligned}$$

L'equazione del moto si scrive dunque nella forma

$$mR\left[\left(\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{e}_\theta - \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right)\hat{e}_r + 2\omega\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_\phi\right] = mg\left(-\hat{e}_r\cos\theta + \hat{e}_\theta\sin\theta\right) + \vec{N}$$

dove $\vec{N}$ è la reazione normale alla guida. Proiettando lungo la direzione tangente alla guida, che è quella di $\hat{e}_\theta$, troviamo

$$mR\left(\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta\right) = mg\sin\theta$$

dato che $\vec{N}\cdot\hat{e}_\theta = 0$. Le posizioni di equilibrio saranno determinate dalla soluzione dell'equazione precedente per $\ddot{\theta} = 0$, cioè da

$$\left(\frac{g}{R\omega^2} + \cos\theta\right)\sin\theta = 0$$

Abbiamo quindi sempre $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Inoltre avremo l'angolo corrispondente a

$$\cos\theta = -\frac{g}{R\omega^2}$$

se $\omega^2 > g/R$. Le soluzioni coincidono con quanto trovato inizialmente con un metodo più semplice.

Consideriamo adesso le piccole oscillazioni. La posizione di equilibrio $\theta = 0$ è chiaramente instabile. Consideriamo $\theta = \pi + \varepsilon$. Inserendo nell'equazione del moto abbiamo

$$mR\left(\ddot{\varepsilon} - \omega^2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon\right) = -mg\sin\varepsilon$$

e ponendo $\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$ e $\cos\varepsilon \simeq 1$ abbiamo

$$\ddot{\varepsilon} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\varepsilon$$

Si tratta di un oscillatore di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{1 - \frac{R\omega^2}{g}}$$

per $\omega^2 < g/R$, in caso contrario $\theta = \pi$ è una posizione di equilibrio instabile. Per $\omega^2 \ll g/R$ si ha approssimativamente

$$f \simeq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

cioè la frequenza di un pendolo di lunghezza R, nel limite di piccole oscillazioni.

Consideriamo adesso $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ dove $\cos\theta_0 = -g/(R\omega^2)$. Abbiamo

$$mR\left(\ddot{\varepsilon} - \omega^2 \sin(\theta_0 + \varepsilon)\cos(\theta_0 + \varepsilon)\right) = mg\sin(\theta_0 + \varepsilon)$$

Ma $\sin(\theta_0 + \varepsilon) \simeq \sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0$ e $\cos(\theta_0 + \varepsilon) = \cos\theta_0 - \varepsilon\sin\theta_0$. Sostituendo troviamo

$$mR\left[\ddot{\varepsilon} - \omega^2\left(\sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0\right)\left(\cos\theta_0 - \varepsilon\sin\theta_0\right)\right] = mg\left(\sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0\right)$$

Svolgendo i prodotti e trascurando i termini del secondo ordine in ε troviamo

$$\ddot{\varepsilon} - \omega^2\left(\sin\theta_0\cos\theta_0 + \varepsilon\cos^2\theta_0 - \varepsilon\sin^2\theta_0\right) = \frac{g}{R}\left(\sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0\right)$$

Ma i termini indipendenti da ε si cancellano, come ci si attende dato che θ_0 è una posizione di equilibrio. Abbiamo infine

$$\ddot{\varepsilon} - \varepsilon\left[2\omega^2\cos^2\theta_0 - \omega^2 + \frac{g}{R}\cos\theta_0\right] = 0$$

Ma sostituendo il valore di $\cos\theta_0$ otteniamo

$$\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\left(\omega^2 - \frac{g^2}{R^2\omega^2}\right) = 0$$

ed otteniamo un oscillatore di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{\left(\frac{R\omega^2}{g} - \frac{g}{R\omega^2}\right)}$$

La frequenza dell'oscillazione stabile è rappresentata in Figura 5.133. Notare che per $\omega \gg g/R$ si ha approssimativamente

$$f \simeq \frac{\omega}{2\pi}$$

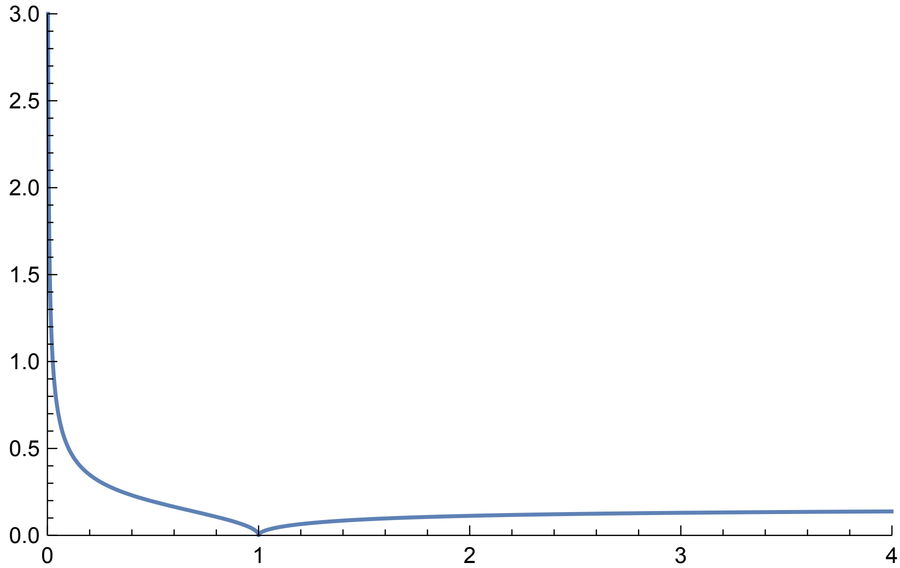

Figura 5.133.: La frequenza di oscillazione attorno al punto di equilibrio stabile del sistema, in unità $(2\pi)^{-1}\sqrt{g/R}$, in funzione del parametro adimensionale $g/R\omega^2$.