

PROBLEMA 5.18

Oscillatore e forza $F = \alpha t$ **

Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0$ in modo tale che la massa si muova di moto uniforme? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto.

Soluzione

Se il moto della massa è uniforme la forza totale su di essa deve essere nulla. Tale forza è data dalla somma della forza di richiamo della molla e di quella esterna applicata:

$$F = -kx + \alpha t$$

che si annulla se

$$x = \frac{\alpha t}{k}.$$

Questo è effettivamente un moto uniforme, corrispondente alle condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ v(0) &= \frac{\alpha}{k}. \end{aligned}$$

L'equazione del moto si scrive

$$m\ddot{x} + kx = \alpha t.$$

Abbiamo già una soluzione particolare dell'equazione completa, cioè il moto uniforme determinato al punto precedente. Per avere la soluzione generale è sufficiente aggiungere la soluzione generale dell'equazione omogenea, cioè una arbitraria oscillazione libera:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{\alpha t}{k}.$$

Si può pensare a questa soluzione generale come ad una oscillazione attorno a un punto che si sposta con moto uniforme.