PROBLEMA 5.1

Doppio piano inclinato ⋆

Un punto materiale è vincolato a muoversi sulla superficie in Figura 5.1, composta da due piani inclinati (con diverso angolo di inclinazione) separati da un piano orizzontale. Senza fare uso di principi di conservazione mostrare che in assenza di attrito se il punto materiale viene lasciato andare sul primo piano ad una altezza h_1, si ferma sul secondo ad una altezza $h_2 = h_1$.

Figura 5.1.: Figura esercizio

Soluzione

Il moto sui piani inclinati sarà uniformemente accelerato. Dato che il moto è rettilineo l'accelerazione è parallela al piano, e possiamo determinarla considerando la proiezione della forza di gravità e della reazione vincolare in tale direzione. In assenza di attrito la reazione vincolare è normale al piano, quindi non contribuisce, e possiamo scrivere in modulo

$$ma = mg\sin\theta_i$$

Lo spazio percorso sul primo piano inclinato e la velocità saranno quindi date da

$$\begin{aligned}\ell_1(t) &= \frac{1}{2}g\sin\theta_1\,t^2\\ v_1(t) &= g\sin\theta_1 t\end{aligned}$$

da cui possiamo determinare il tempo di arrivo sul piano orizzontale

$$\ell_1(t_{1,f}) = \frac{1}{2}g\sin\theta_1 t_{1,f}^2 = \frac{h_1}{\sin\theta_1}$$

cioè

$$t_{1,f} = \frac{1}{\sin\theta_1}\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

e la velocità

$$v_{1,f} = v_1(t_{1,f}) = \sqrt{2gh_1}\,.$$

Notare che questo risultato non dipende dalla inclinazione del piano. Passando sul piano orizzontale il modulo della velocità non cambierà (giustificheremo al termine dell'esercizio questa affermazione) e la massa si muoverà con velocità costante fino al secondo piano inclinato, a cui arriverà a $t = t_{2,i}$. Passando su quest'ultimo il modulo della velocità rimarrà ancora una volta invariato, e avremo adesso un modo decelerato che potrà essere descritto come

$$\begin{aligned} \ell_2(t) &= v_{1,f}(t - t_{2,i}) - \frac{1}{2} g \sin\theta_2 \,(t - t_{2,i})^2 \\ v_2(t) &= v_{1,f} - g \sin\theta_2 (t - t_{2,i}) \end{aligned}$$

L'altezza massima si raggiungerà ad un tempo $t_{2,f}$ determinato da $v_2(t_{2,f}) = 0$ cioè

$$(t_{2,f} - t_{2,i}) = \frac{v_{1,f}}{g \sin\theta_2}$$

e lo spazio percorso sarà

$$\ell_2(t_{2,f}) = \frac{1}{2} \frac{v_{1,f}^2}{g \sin\theta_2} = \frac{h_1}{\sin\theta_2}$$

corrispondente ad una altezza finale

$$h_2 = \ell_2 \left(t_{f,2}\right) \sin\theta_2 = h_1$$

Resta da giustificare la conservazione del modulo della velocità nella transizione piano inclinato-piano orizzontale e viceversa. Osserviamo che a un dato istante il punto materiale è sottoposto alla forza di gravità e a una reazione vincolare che sappiamo essere normale al vincolo (assenza di attrito). Nel punto di raccordo la normale al piano non è ben definita, e il problema diviene ambiguo. Discuteremo il significato di questa ambiguità in un prossimo problema. Per adesso la elimineremo modificando la superficie in un intorno piccolo quanto vogliamo dello spigolo, in modo da renderlo sufficientemente liscio (Figura 5.2).

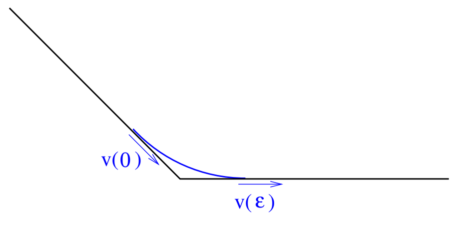

Figura 5.2.: Il raccordo regolarizzato tra piano inclinato e orizzontale.

Allora la reazione vincolare sarà ben definita ad ogni istante, e non potrà contribuire in nessun caso alla accelerazione nella direzione tangenziale al piano. Quindi avremo (usando il fatto che la derivata del versore tangente $\hat{\tau}$ è ad esso perpendicolare)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \hat{\tau}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \hat{\tau} + \vec{v} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \hat{\tau} = \vec{g} \cdot \hat{\tau}$$

da cui segue che

$$\vec{v} \cdot \hat{\tau}(\epsilon) = \vec{v} \cdot \hat{\tau}(0) + \int_0^\epsilon \vec{g} \cdot \hat{\tau}\, dt$$

dove ϵ è il tempo che la particella passa sulla parte "lisciata" del raccordo. Poichè possiamo prendere piccolo quanto vogliamo segue che

$$\vec{v} \cdot \hat{\tau}(\epsilon) = \vec{v} \cdot \hat{\tau}(0).$$