

PROBLEMA 5.21

Carrucola e pedana mobile **

Nel sistema rappresentato in Figura 5.11 la pedana di massa M è solidale con la prima carrucola, ed è libera di scorrere sul piano orizzontale. Anche la massa m_1 è libera di scorrere sul piano inclinato. Non vi sono attriti, ed il filo è inestensibile. Disegnare i diagrammi delle forze per le tre masse in gioco, e determinare le loro accelerazioni.

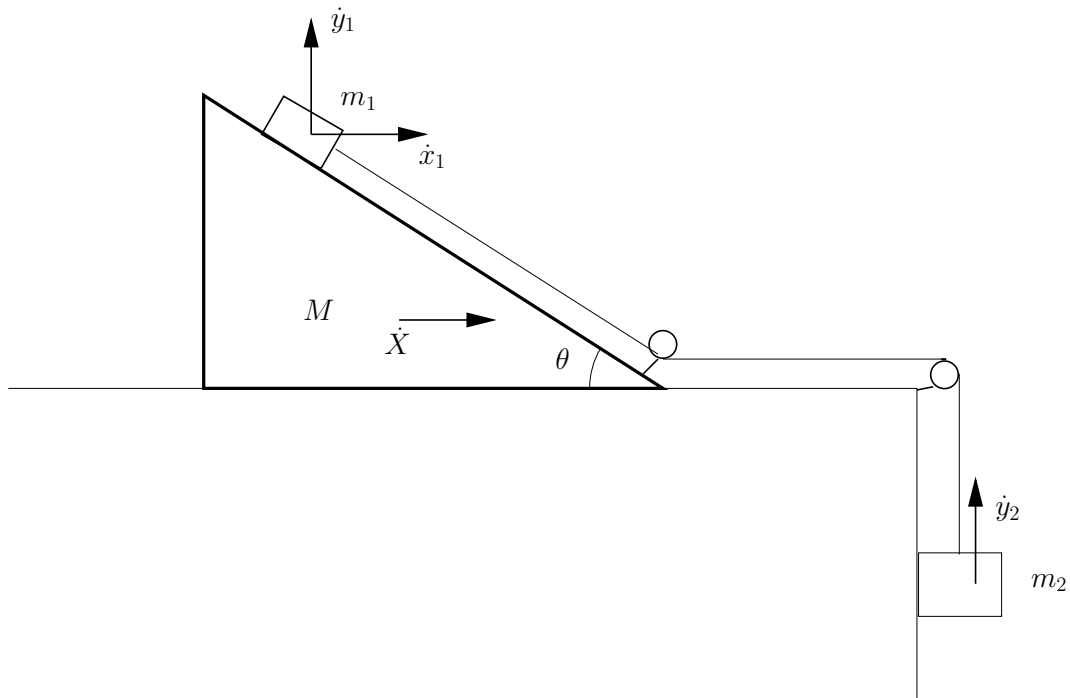


Figura 5.11.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Soluzione

Consideriamo il diagramma delle forze per la massa m_2 (Figura 5.12). Considerando il solo moto verticale abbiamo l'equazione

$$m_2 \ddot{y}_2 = T - m_2 g$$

dove T è la tensione del filo.

Per quanto riguarda il piano inclinato, di cui la carrucola fa parte, abbiamo il diagramma delle forze rappresentato in Figura 5.13

che corrisponde alle equazioni del moto

$$\begin{aligned} M \ddot{x} &= T - T \cos \theta - N \sin \theta \\ M \ddot{y} &= R - Mg - N \cos \theta + T \sin \theta. \end{aligned}$$

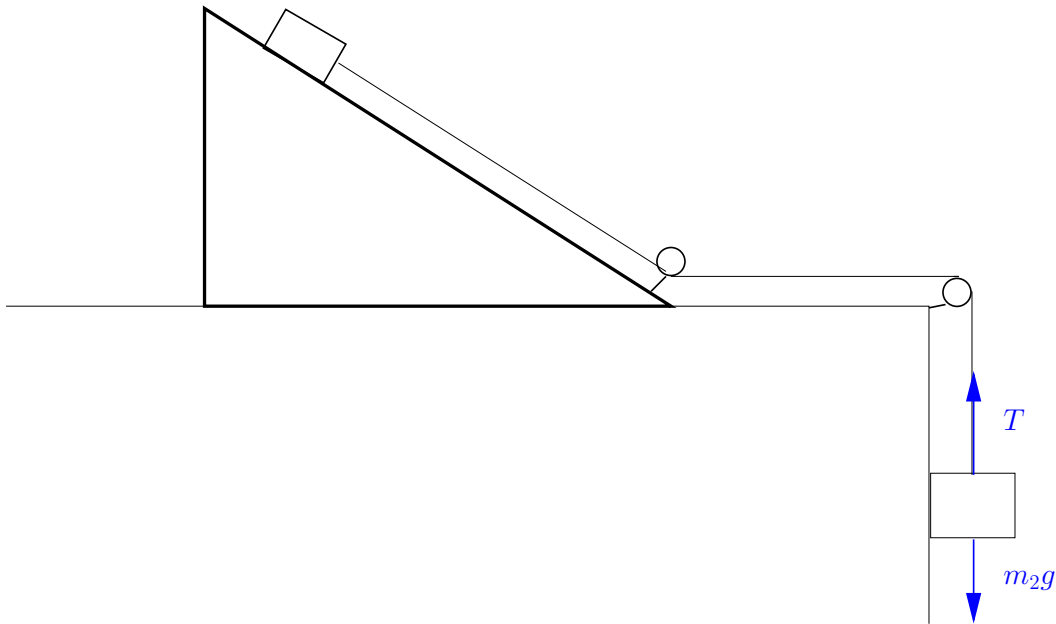


Figura 5.12.: Le forze che agiscono sulla massa sospesa m_2 .

Notare che $\dot{y} = 0$. Consideriamo infine la massa m_1 . Il diagramma delle forze è in Figura 5.14

e le relative equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= N \sin \theta + T \cos \theta \\ m_1 \ddot{y}_1 &= N \cos \theta - m_1 g - T \sin \theta \end{aligned}$$

Abbiamo le 5 relazioni precedenti e le incognite \ddot{x} , \ddot{x}_1 , \ddot{y}_1 , \ddot{y}_2 , T , N , R . Servono quindi altre due equazioni. La prima si può scrivere imponendo che l'accelerazione della massa m_1 relativa alla pedana sia inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo θ :

$$\tan \theta = -\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{x}_1 - \ddot{x}}$$

La seconda deriva dalla inestensibilità del filo. Possiamo scrivere la lunghezza di quest'ultimo come

$$\ell = -y_2 - x + \frac{x - x_1}{\cos \theta} + \text{costante}$$

e derivando due volte rispetto al tempo otteniamo

$$(\ddot{y}_2 + \ddot{x}) \cos \theta = \ddot{x} - \ddot{x}_1.$$

Abbiamo in conclusione un sistema lineare che permette di ricavare le accelerazioni incognite, insieme a T e N .

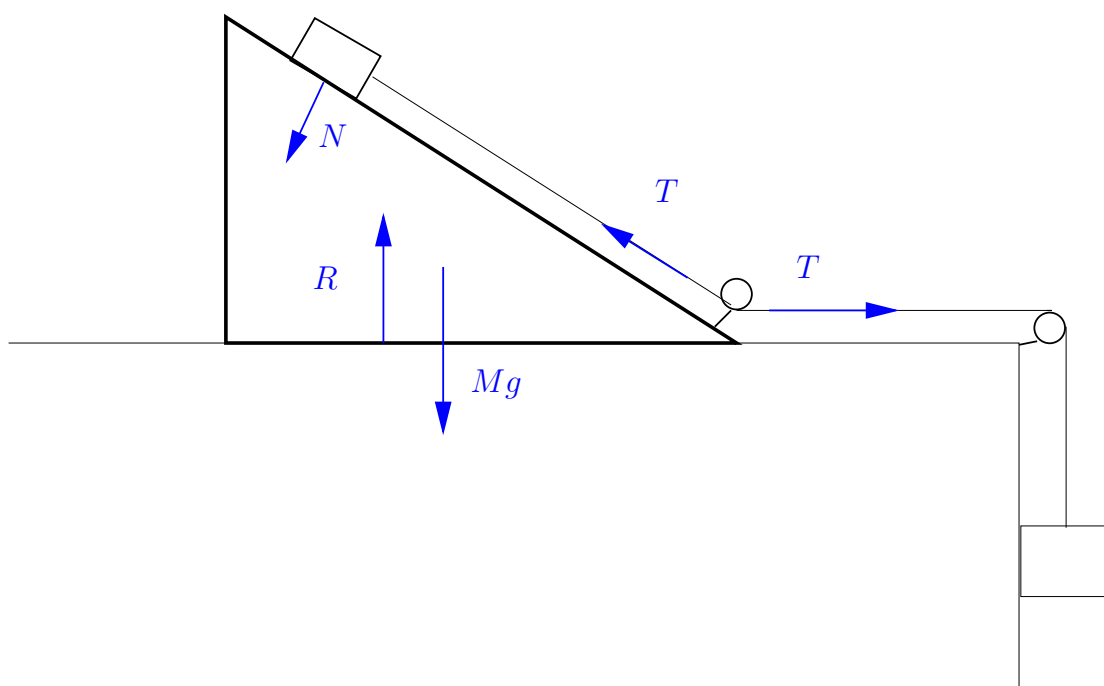


Figura 5.13.: Le forze che agiscono sul piano inclinato.

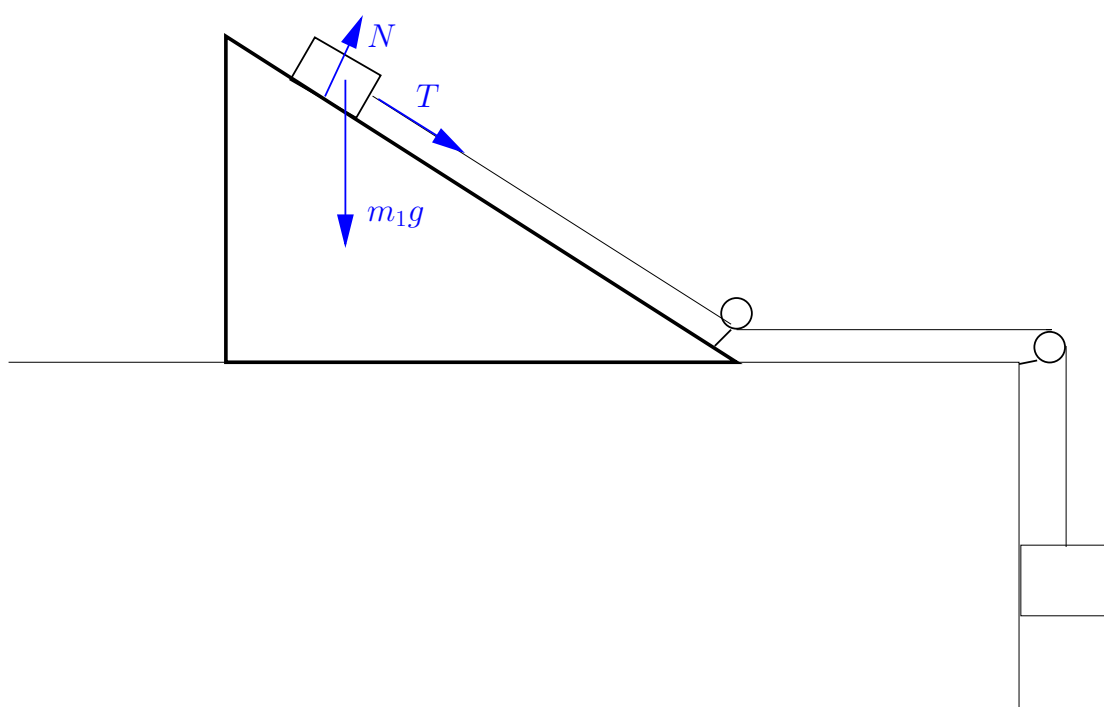


Figura 5.14.: Le forze che agiscono sul corpo appoggiato al piano inclinato.