PROBLEMA 5.24

Pedana mobile ⋆⋆

La pedana in Figura 5.18 è inclinato di un angolo $\theta(t)$ rispetto alla orizzontale, ed ha un punto fisso. La massa m è libera di muoversi su di essa senza attrito. Determinare l'equazione del moto. Risolverla nel caso $\theta(t) = \Omega t$, e determinare se possibile le condizioni iniziali a $t = 0$ in modo da avere una oscillazione armonica.

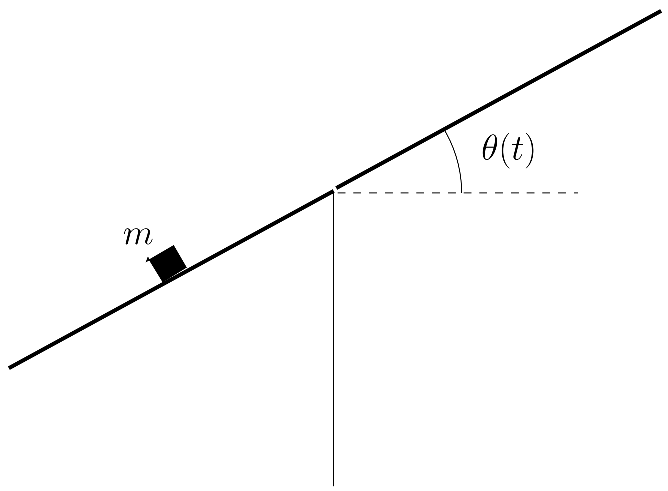

Figura 5.18.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Soluzione

Introducendo un sistema di coordinate polari centrato sul punto fisso possiamo scrivere la posizione della massa come

$$\vec{r} = x\hat{e}_r$$

dove x è la coordinata della massa sulla pedana. Derivando otteniamo la velocità

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{e}_r + x\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

e l'accelerazione

$$\vec{a} = \left(\ddot{x} - x\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(x\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta\,.$$

Le forze che agiscono sulla massa si scrivono

$$\vec{F} = -mg(\hat{e}_r \sin\theta + \hat{e}_\theta \cos\theta) + N\hat{e}_\theta$$

dove $N\hat{e}_\theta$ è la reazione vincolare della pedana, ad essa normale. Prendendo le componenti dirette lungo $\hat{e}_r$ di $\vec{F} = m\vec{a}$ otteniamo

$$m\left(\ddot{x} - x\dot{\theta}^2\right) = -mg\sin\theta\,.$$

Nel caso $\theta = \Omega t$ abbiamo

$$\ddot{x} - \Omega^2 x = -g \sin \Omega t \,.$$

Questa è una equazione lineare a coefficienti costanti, non omogenea. Cerchiamo la soluzione generale $x_o(t)$ dell'omogenea associata

$$\ddot{x}_o - \Omega^2 x_o = 0$$

nella forma $x = e^{\alpha t}$. Troviamo come possibili soluzioni $\alpha = \pm\Omega$ e quindi

$$x_o = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} \,.$$

Determiniamo adesso una soluzione particolare dell'equazione completa, che cercheremo nella forma

$$x^* = C \sin \Omega t \,.$$

Sostituendo troviamo

$$-2\Omega^2 C = -g$$

e quindi

$$x^* = \frac{g}{2\Omega^2} \sin \Omega t \,.$$

La soluzione generale è quindi

$$x = x_o + x^* = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} + \frac{g}{2\Omega^2} \sin \Omega t$$

e per avere una oscillazione armonica dovrà essere $A = B = 0$. Questo significa

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ v(0) &= \frac{g}{2\Omega} \,. \end{aligned}$$