PROBLEMA 5.25

Urto massa-pedana ⋆⋆

La massa m in Figura 5.19 si muove inizialmente sul piano orizzontale privo di attrito con velocità v_0. Successivamente sale sul piano inclinato di massa M, libero anche esso di muoversi sul piano. Determinare per quali valori della velocità v_0 la massa supera il piano inclinato.

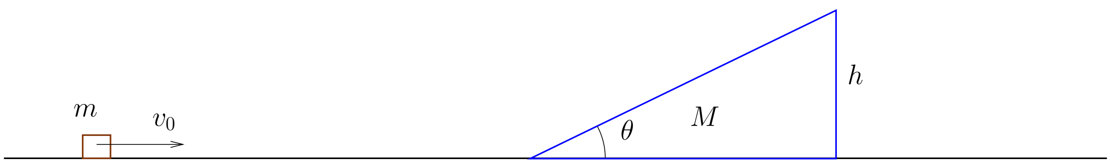

Figura 5.19.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Soluzione

Sia l'energia che la quantità di moto orizzontale del sistema si conservano. Uguagliamo queste due quantità tra l'istante immediatamente precedente al contatto tra pedana e massa e l'istante in cui la massa arriva nel punto più alto della pedana:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m\left[\left(V_x + v_{x,rel}\right)^2 + v_{y,rel}^2\right] + \frac{1}{2}MV_x^2 + mgh \\
mv_0 &= m\left(V_x + v_{x,rel}\right) + MV_x
\end{aligned}
$$

dove V_x indica la velocità del piano inclinato (orizzontale) e $v_{x,rel}$, $v_{y,rel}$ le due componenti della velocità della massa relative a quest'ultimo. Questa velocità relativa deve inoltre essere inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo θ

$$
\frac{v_{y,rel}}{v_{x,rel}} = \tan\theta
$$

ma non useremo questa ultima condizione. Utilizzando le tre relazioni si può calcolare $v_{x,rel}$, $v_{y,rel}$ e V_x, e porre ad esempio $v_{x,rel} > 0$.

Più semplicemente si può determinare la velocità necessaria a far arrivare la massa esattamente nel punto più alto della pedana. In questo caso $v_{x,rel} = v_{y,rel} = 0$ e le leggi di conservazione si scrivono

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_{0,min}^2 &= \frac{1}{2}(m+M)V_x^2 + mgh \\
mv_{0,min} &= (m+M)V_{x,min}
\end{aligned}
$$

da cui segue immediatamente

$$
v_{0,min} = \sqrt{2gh\frac{m+M}{M}}\,.
$$

Per velocità maggiori di quella determinata il piano inclinato verrà superato. Notare che per $M \to \infty$ si ha il consueto risultato $v_{0,min} \to \sqrt{2gh}$, mentre per $M \to 0$ $v_{0,min} \to \infty$.