PROBLEMA 5.26

## Filo che si avvolge ⋆⋆

Il disco in figura è fissato rigidamente ad un piano orizzontale, e ad esso è fissato un filo inestensibile di lunghezza $\ell$. All'altro estremo è fissata una massa $m$ che viene lanciata con velocità iniziale di modulo $v_0$ in direzione perpendicolare al filo. Calcolare la velocità della massa, la sua traiettoria e la tensione del filo in funzione del tempo.

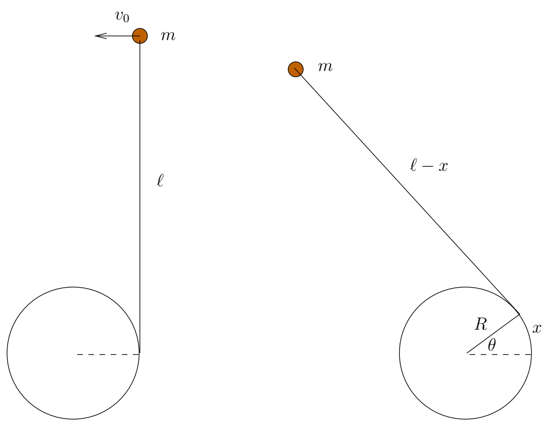


Figura 5.20.: Il sistema considerato nell'esercizio. A sinistra nella condizione iniziale, a destra in un istante successivo.

### Soluzione

La velocità della massa è sempre ortogonale al filo, quindi l'unica forza ad essa applicata (la tensione del filo) non fa lavoro. L'energia cinetica sarà quindi conservata ed il modulo della velocità sarà sempre uguale a $v_0$. Per quanto riguarda la tensione del filo, possiamo considerare istante per istante il moto come moto circolare con velocità $v_0$ attorno a un punto posto a distanza $\ell - x = \ell - R\theta$. Avremo quindi uguaglianza tra $T/m$ e accelerazione centripeta:

$$m\frac{v_0^2}{\ell - R\theta} = T$$

quindi la tensione aumenta all'accorciarsi del filo.

Verifichiamo tutto questo in modo più formale. Introducendo un sistema di coordinate polari possiamo scrivere la posizione della massa come

$$\vec{r} = R\hat{e}_r + (\ell - R\theta)\hat{e}_\theta$$

e derivando rispetto al tempo troviamo velocità

$$\vec{v} = R\dot{\hat{e}}_r + (\ell - R\theta)\dot{\hat{e}}_\theta - R\dot{\theta}\hat{e}_\theta = -\dot{\theta}(\ell - R\theta)\hat{e}_r$$

e accelerazione

$$\vec{a} = \left[R\dot{\theta}^2 - \ddot{\theta}(\ell - R\theta)\right]\hat{e}_r - \dot{\theta}^2(\ell - R\theta)\hat{e}_\theta\,.$$

D'altra parte la forza che agisce sulla massa si può scrivere come $\vec{F} = -T\hat{e}_\theta$ e dal secondo principio della dinamica segue

$$\begin{aligned} m\dot{\theta}^2(\ell - R\theta) &= T \\ R\dot{\theta}^2 - \ddot{\theta}(\ell - R\theta) &= 0\,. \end{aligned}$$

La seconda equazione si può riscrivere come

$$\frac{d}{dt}\dot{\theta}(\ell - R\theta) = 0$$

ossia

$$\dot{\theta}(\ell - R\theta) = v_0\,.$$

Sostituendo nella seconda abbiamo

$$T = \frac{mv_0^2}{\ell - R\theta}\,.$$

Per la traiettoria possiamo scrivere

$$\vec{r} = R\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + (\ell - R\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

che da direttamente l'equazione in forma parametrica:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta - (\ell - R\theta)\sin\theta \\ y &= R\sin\theta + (\ell - R\theta)\cos\theta\,. \end{aligned}$$

La distanza dal centro diminuisce con $\theta$:

$$r^2 = x^2 + y^2 = R^2 + (\ell - R\theta)^2\,.$$