PROBLEMA 5.2

Moto su una elica ⋆⋆

Una particella materiale di massa m è libera di muoversi in presenza di una forza di gravità $\vec{F}_g = -mg\hat{e}_z$ su un vincolo privo di attrito dalla forma a elica, descritto dalle equazioni parametriche

$$x(\varphi) = \rho\cos\varphi \tag{5.2.1a}$$
$$y(\varphi) = \rho\sin\varphi \tag{5.2.1b}$$
$$z(\varphi) = \frac{h}{2\pi}\varphi \tag{5.2.1c}$$

dove ρ, h sono costanti positive fissate. Al tempo $t = 0$ vale $\varphi = 0$ e la particella è ferma. Determinare la legge oraria del moto e la reazione vincolare $\vec{N}$.

Soluzione

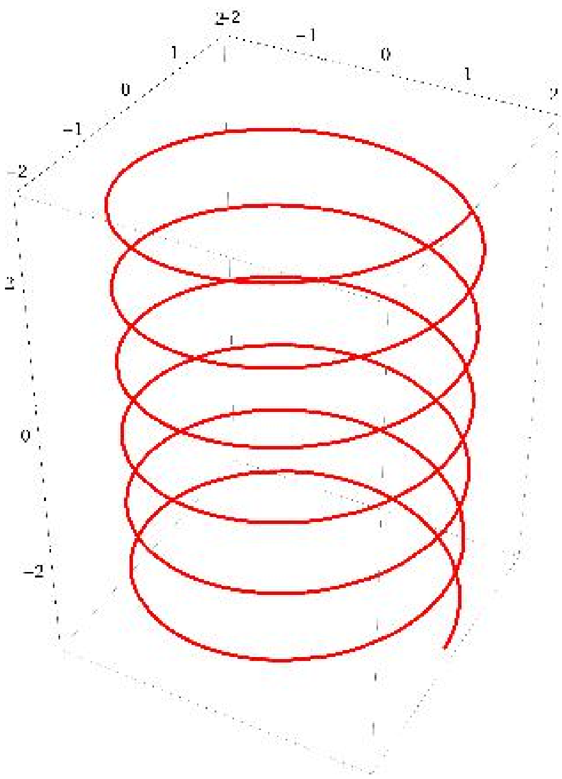

Figura 5.3.: Una parte della spirale descritta dalle Equazioni (5.2.1a)-(5.2.1c). Si è scelto $\rho = 2$ e $h = 1$.

Il punto materiale è sottoposto alla forza di gravità e alla reazione vincolare $\vec{N}$. L'equazione del moto sarà dunque

$$m\vec{a} = -mg\hat{e}_z + \vec{N} \tag{5.2.2}$$

In assenza di attrito la reazione vincolare è perpendicolare alla elica, condizione che possiamo scrivere come $\vec{N} \cdot \hat{\tau} = 0$ dove $\hat{\tau}$ è il versore tangente alla traiettoria. Questo significa che se consideriamo l'accelerazione nella direzione $\hat{\tau}$ avremo

$$m\vec{a} \cdot \hat{\tau} = -mg\hat{e}_z \cdot \hat{\tau} + \vec{N} \cdot \hat{\tau} = -mg\hat{e}_z \cdot \hat{\tau}$$

d'altra parte l'angolo tra la verticale e la tangente alla traiettoria è costante, quindi l'accelerazione tangenziale è costante, uguale a quella di un punto materiale su un piano inclinato nello stesso modo. Per verificare questo scriviamo il vettore posizione

$$\vec{R} = \rho\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\varphi\hat{e}_z$$

e la velocità

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \rho\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \frac{h}{2\pi}\dot{\varphi}\hat{e}_z = \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{h}{2\pi}\dot{\varphi}\hat{e}_z$$

dove abbiamo utilizzato le relazioni $\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$ e $\dot{\hat{e}}_z = 0$. Segue che

$$\hat{\tau} = \frac{2\pi\rho\hat{e}_\varphi + h\hat{e}_z}{\sqrt{(2\pi\rho)^2 + h^2}}$$

e quindi

$$\hat{\tau} \cdot \hat{e}_z = \frac{h}{\sqrt{(2\pi\rho)^2 + h^2}} = \sin\theta$$

dove θ è l'angolo tra l'orizzontale e la tangente alla traiettoria (notare che il denominatore è lo spazio percorso ad ogni giro della elica e il numeratore la variazione in altezza). Valutiamo adesso l'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z = \rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z$$

ricordando che $\dot{\hat{e}}_\varphi = \dot{\varphi}\hat{e}_\rho$. Le equazioni (5.2.2) si scrivono quindi

$$m\left(\rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z\right) = -mg\hat{e}_z + \vec{N}\,. \tag{5.2.3}$$

Proiettando nella direzione $\hat{\tau}$

$$\left(\rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z\right) \cdot \hat{\tau} = -g\hat{e}_z \cdot \hat{\tau}$$

cioè

$$\left(\rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}\hat{e}_z\right) \cdot \left(2\pi\rho\hat{e}_\varphi + h\hat{e}_z\right) = -g\hat{e}_z \cdot \left(2\pi\rho\hat{e}_\varphi + h\hat{e}_z\right)$$

e

$$\ddot{\varphi} = -g \frac{\frac{h}{2\pi}}{\rho^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} .$$

Da questo segue immediatamente

$$\dot{\varphi} = -g \frac{\frac{h}{2\pi}}{\rho^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} t$$

e

$$\varphi = -\frac{1}{2} g \frac{\frac{h}{2\pi}}{\rho^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} t^2 .$$

Sostituendo nelle equazioni parametriche otteniamo le leggi orarie. Dalla Equazione (5.2.3) abbiamo

$$\vec{N} = m \left[\rho \ddot{\varphi} \hat{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \hat{e}_\rho + \left(\frac{h}{2\pi} \ddot{\varphi} + g \right) \hat{e}_z \right]$$

e sostituendo le espressioni $\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}$ ottenute precedentemente otteniamo la reazione vincolare in funzione del tempo.