PROBLEMA 5.32

Massima compressione ⋆⋆

Nel sistema in Figura 5.25 la massa m_1 è lanciata inizialmente con velocità v_0. La molla di lunghezza a riposo uguale alla lunghezza del piano inclinato è libera di contrarsi, e il piano inclinato è libero di spostarsi sul piano orizzontale. Non vi sono attriti. Calcolare la massima contrazione della molla, e la massima velocità del piano inclinato.

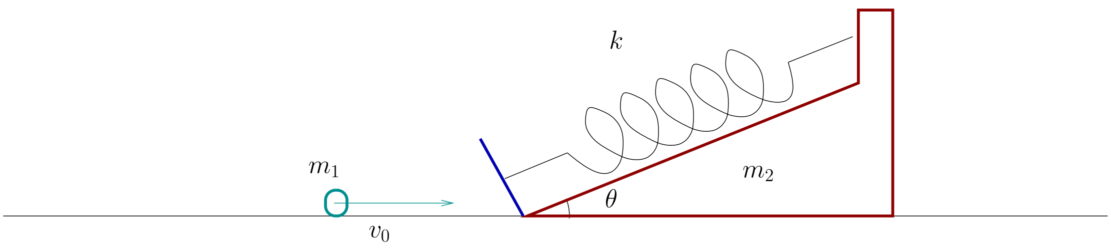

Figura 5.25.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Soluzione

Usiamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto orizzontale. Detta δ la contrazione della molla abbiamo

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + m_1 g\delta\sin\theta + \frac{1}{2}k\delta^2$$

e

$$m_1 v_0 = (m_1+m_2)V$$

dove è stato usato il fatto che nel momento di massima contrazione le masse m_1 e m_2 hanno la stessa velocità. Da questo segue

$$\delta^2 + 2\frac{m_1 g\sin\theta}{k}\delta - \frac{1}{k}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v_0^2 = 0$$

e quindi ($\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ è la massa ridotta del sistema)

$$\delta = \frac{m_1 g\sin\theta}{k}\left(\sqrt{1+\frac{\mu k}{m_1^2 g^2\sin^2\theta}v_0^2} - 1\right)$$

dove è stata scelta la soluzione $\delta > 0$. Per valori molto grandi della velocità l'effetto della molla è dominante:

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\mu}{k}}v_0$$

mentre per valori piccoli è la gravità a limitare la contrazione:

$$\delta \simeq \frac{\mu}{2m_1 g\sin\theta}v_0^2$$

Per ottenere le approssimazioni precedenti si è utilizzato $\sqrt{1+x} \simeq \sqrt{x}$ per $x \gg 1$ e $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$ per $x \ll 1$. La massima velocità del piano inclinato si ha chiaramente quando la massa m_1 è separata da esso. In questo caso valgono le normali formule dell'urto elastico, che danno

$$v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$