PROBLEMA 5.35

Moto su una guida parabolica ⋆⋆

Una particella di massa m è vincolata a muoversi su una guida della forma descritta dall'equazione

$$y = -\frac{x^2}{a}$$

dove $a > 0$ è un parametro assegnato della dimensione di una lunghezza. Se la particella si trova inizialmente in $x = 0$ con velocità positiva molto piccola, è possibile il distacco dalla guida?

Soluzione

Se scriviamo la reazione vincolare nella forma $R\hat{n}$, dove $\hat{n}$ è il versore normale al vincolo nel punto dato, la condizione di distacco è $R < 0$. L'equazione del moto nella direzione normale $\hat{n}$ si scrive

$$m\frac{v^2}{\rho} = -mg\cos\theta + R$$

dove ρ è il raggio di curvatura della parabola nel punto dato e θ la sua inclinazione rispetto alla verticale. Dall'equazione della guida segue che

$$dy = -\frac{2x}{a}dx$$

da cui

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}}}.$$

Per il raggio di curvatura abbiamo la formula

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$$

da cui

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{2}{a}\frac{1}{\left[1+\frac{4x^2}{a^2}\right]^{3/2}}$$

e quindi

$$R = \frac{mg}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}}} - \frac{2m}{a}\frac{v^2}{\left[1+\frac{4x^2}{a^2}\right]^{3/2}}.$$

Il modulo quadro della velocità si determina usando la conservazione dell'energia:

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

da cui

$$v^2 = \frac{2g}{a}x^2$$

e sostituendo troviamo

$$R = \frac{mg}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}}}$$

che risulta essere sempre positivo.