PROBLEMA 5.3

Moto viscoso ⋆⋆

In presenza di una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ una particella di massa m viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di modulo v_0. Determinare la massima altezza raggiunta rispetto al punto di partenza. Determinare inoltre la velocità alla quale la particella passa nuovamente dal punto di partenza, in particolare nel caso in cui v_0 è molto grande. Cosa significa "molto grande" in questo caso?

Soluzione

L'equazione del moto per il moto nella direzione verticale si scrive

$$m\frac{dv}{dt} = -\lambda v - mg\,.$$

Questa è una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, del primo ordine, che si può risolvere con diversi metodi.

Possiamo procedere per separazione delle variabili, riscrivendola nella forma

$$\frac{1}{v+\frac{mg}{\lambda}}\frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda}{m}$$

e integrando membro a membro nel tempo:

$$\int_0^t \frac{1}{v+\frac{mg}{\lambda}}\frac{dv}{dt}dt = -\int_0^t \frac{\lambda}{m}dt\,.$$

L'integrale al membro sinistro è immediato, quello a destra lo diviene col cambio di variabile $u = v(t)$:

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{1}{u+\frac{mg}{\lambda}}du = -\frac{\lambda}{m}t$$

ossia

$$\log\frac{v(t)+\frac{mg}{\lambda}}{v_0+\frac{mg}{\lambda}} = -\frac{\lambda}{m}t\,.$$

Esplicitando la velocità abbiamo infine

$$v(t) = \left(v_0+\frac{mg}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda} \tag{5.3.1}$$

che può essere usata per determinare il tempo t_{max} nel quale viene raggiunto l'altezza massima, risolvendo $v(t_{max}) = 0$. Si ottiene

$$e^{-\frac{\lambda}{m}t_{max}} = \frac{1}{1+\frac{\lambda v_0}{mg}}, \qquad t_{max} = \frac{m}{\lambda}\log\left(1+\frac{\lambda v_0}{mg}\right)\,.$$

Per avere lo spazio percorso integriamo direttamente la velocità:

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \frac{m}{\lambda}\left(v_0 + \frac{mg}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) - \frac{mg}{\lambda}t \tag{5.3.2}$$

e sostituendo t_{max}

$$h_{max} = s(t_{max}) = \frac{mv_0}{\lambda} - \frac{m^2 g}{\lambda^2}\log\left(1 + \frac{\lambda v_0}{mg}\right).$$

Troviamo adesso la velocità quando la particella passa nuovamente a $s = 0$. Possiamo riadattare la soluzione (5.3.2) ponendo $v_0 = 0$, e ricavare il tempo di caduta

$$s(t_0) = \frac{m^2 g}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t_0}\right) - \frac{mg}{\lambda}t_0 = h_{max}$$

che non è possibile risolvere esplicitamente in t_0. È chiaro però che al crescere di v_0 anche h_{max} cresce, e di conseguenza t_0. Quindi dalla (5.3.1), sempre ponendo $v_0 = 0$, otteniamo

$$v(t_0) = \frac{mg}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t_0} - \frac{mg}{\lambda} \simeq -\frac{mg}{\lambda}.$$

Questa approssimazione sarà buona quando

$$\frac{\lambda v_0}{mg} \gg \log\left(1 + \frac{\lambda v_0}{mg}\right)$$

cioè quando $v_0 \gg mg/\lambda$.

Un metodo alternativo per risolvere l'equazione differenziale è quello di cercare prima tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = 0$$

nella forma $v = Ae^{-kt}$ dove k è una costante da determinare. Sostituendo troviamo la condizione

$$k + \frac{\lambda}{m} = 0$$

e quindi un insieme di soluzioni dipendenti da un parametro arbitrario che rappresentano la soluzione generale (l'equazione è del primo ordine).

È necessario adesso aggiungere una soluzione particolare dell'equazione completa

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = -g.$$

In questo caso possiamo farci guidare dall'intuizione fisica e cercare una soluzione a velocità costante, che rappresenta la situazione in cui forze di attrito e di gravità si bilanciano. Abbiamo $v = -gm/\lambda$ e quindi otteniamo la soluzione generale nella forma

$$v(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{gm}{\lambda}.$$

Ponendo $v(t) = v_0$ troviamo $A = v_0 + gm/\lambda$ e quindi la (5.3.1).