PROBLEMA 5.40

Carrucola con attrito ⋆⋆⋆

Tra un filo e la carrucola rappresentata in Figura 5.31 (da considerare immobile) si ha un attrito descritto da coefficienti μ_s, μ_d. Ai due estremi del filo sono appese delle masse m_1 e m_2. Per quali valori di m_1, m_2 il sistema è in equilibrio? In tale condizione, quanto vale la tensione del filo in funzione dell'angolo θ?

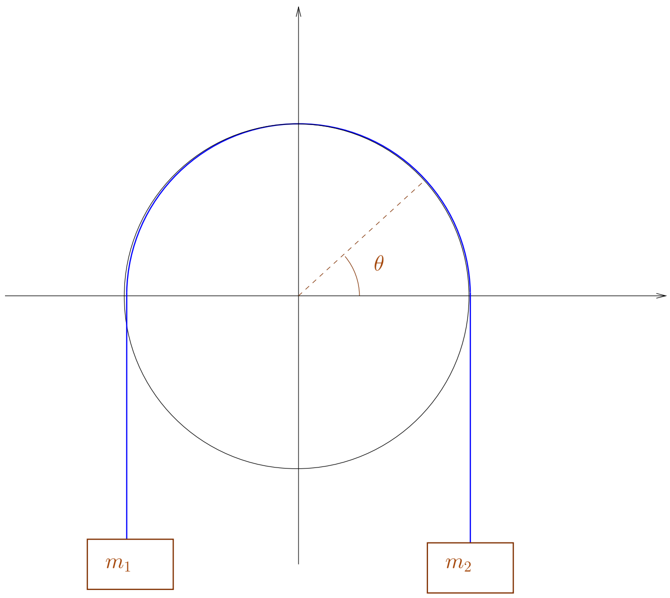

Figura 5.31.: La carrucola considerata nel problema.

Soluzione

Consideriamo le forze che agiscono su un tratto infinitesimo del filo (Figura 5.32). Abbiamo all'equilibrio

$$0 = -T(\theta + d\theta)\hat{\tau}(\theta + d\theta) + T(\theta)\hat{\tau}(\theta) + dN(\theta)\hat{n}(\theta) + dF_A(\theta)\hat{\tau}(\theta) \tag{5.40.1}$$

dove $T(\theta)$ è la tensione del filo, $dN(\theta)$ la reazione vincolare normale e $dF_A(\theta)$ la forza di attrito, con

$$|dF_A(\theta)| \le \mu_s dN(\theta)\,. \tag{5.40.2}$$

Sviluppando possiamo scrivere

$$\frac{d}{d\theta}\left(T(\theta)\hat{\tau}(\theta)\right) = \frac{dN(\theta)}{d\theta}\hat{n}(\theta) + \frac{dF_A(\theta)}{d\theta}\hat{\tau}(\theta)\,.$$

Espandendo la derivata otteniamo

$$\frac{dT}{d\theta}\hat{\tau} + T\frac{d\hat{\tau}}{d\theta} = \frac{dN}{d\theta}\hat{n} + \frac{dF_A}{d\theta}\hat{\tau}\,.$$

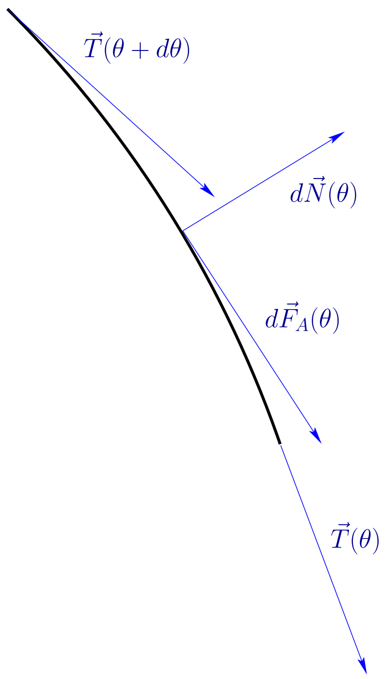

Figura 5.32.: Le forze che agiscono su un tratto del filo compreso tra θ e $\theta + d\theta$.

Proiettando nelle direzioni tangenti e normali abbiamo le due equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\theta} &= \frac{dF_A}{d\theta} \\ T &= -\frac{dN}{d\theta} \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$\frac{d\hat{\tau}}{d\theta} = -\hat{n}\,.$$

Usando il valore massimo e minimo della forza di attrito possiamo scrivere

$$-\mu_s|T| \le \frac{dT}{d\theta} \le \mu_s|T|\,. \tag{5.40.3}$$

Integrando abbiamo

$$T(0)e^{-\mu_s\theta} \le T(\theta) \le T(0)e^{\mu_s\theta}$$

ossia, dato che $T(0) = m_2 g$ e $T(\pi) = m_1 g$,

$$e^{-\mu_s\pi} \le \frac{m_1}{m_2} \le e^{\mu_s\pi}\,.$$

Per un valore arbitrario del rapporto delle masse che soddisfa la condizione precedente la tensione $T(\theta)$ non è univocamente determinata. Esistono molti modi infatti di soddisfare la (5.40.3) con le corrette condizioni al contorno. Nei casi estremi

$$\frac{m_1}{m_2} = e^{\pm\mu_s\pi}$$

la soluzione è invece unica:

$$T(\theta) = m_2 g e^{\pm\mu_s\theta}\,.$$