PROBLEMA 5.41

Oscillatori accoppiati ⋆⋆⋆

Scrivere e risolvere le equazioni del moto per il sistema in Figura 5.33, mostrando che è possibile scrivere il moto come somma di due modi di oscillazione indipendenti. Descrivere ciascuno di essi. La lunghezza a riposo delle molle è nulla.

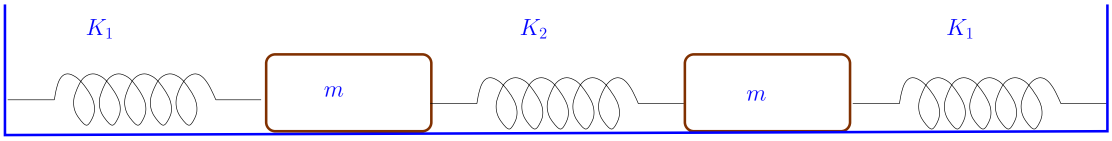

Figura 5.33.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Soluzione

Le equazioni del moto sono della forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -K_1 x_1 + K_2(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= K_2(x_1 - x_2) - K_1 x_2 \end{aligned}$$

Conviene introdurre la notazione

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

in modo da poter riscrivere le equazioni del moto nella forma

$$m\underline{\ddot{u}} + K\underline{u} = 0$$

dove

$$K = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1 + K_2 \end{pmatrix}$$

In analogia con il metodo usato per trattare equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti cercheremo soluzioni della forma

$$\underline{u}(t) = \underline{A}e^{\alpha t}$$

dove $\underline{A}$ è un vettore costante. Sostituendo nelle equazioni del moto abbiamo

$$\left(\alpha^2 I + \frac{1}{m}K\right)\underline{A} = 0 \tag{5.41.1}$$

Questo è un sistema lineare omogeneo che avrà soluzioni non banali quando

$$\det\left(\alpha^2 I + \frac{1}{m}K\right) = \begin{vmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha^2 \end{vmatrix} = 0$$

dove abbiamo posto $\omega_i^2 = K_i/m$. Questo significa

$$\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha^2\right)^2 = \omega_2^4$$

che accadrà quando

$$\alpha_1^2 = -\omega_1^2$$

oppure quando

$$\alpha_2^2 = -\omega_1^2 - 2\omega_2^2$$

Nel primo caso il sistema (5.41.1) diviene

$$\begin{pmatrix} \omega_2^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \underline{A}_1 = 0$$

corrispondente alla soluzione

$$\underline{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t\right) .$$

In questo caso le due masse oscillano in sincrono, e la molla centrale non influenza il moto. Questo spiega la frequenza di oscillazione. Nel secondo caso abbiamo

$$\begin{pmatrix} -\omega_2^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix} \underline{A}_2 = 0$$

da cui

$$\underline{u}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(a_2 \cos \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2} t + b_2 \sin \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2} t\right) .$$

In questo caso le due masse oscillano in opposizione di fase. La soluzione generale sarà una sovrapposizione arbitraria di $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$.