PROBLEMA 5.42

Oscillatore ⋆⋆

Nel sistema in Figura 5.34 l'asta AC, $\overline{AC} = \ell$, è libera di ruotare attorno al perno posto in A, ed è di massa trascurabile. La molla ha costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre $\overline{AD} = \overline{AB} = \frac{1}{3}\ell$.

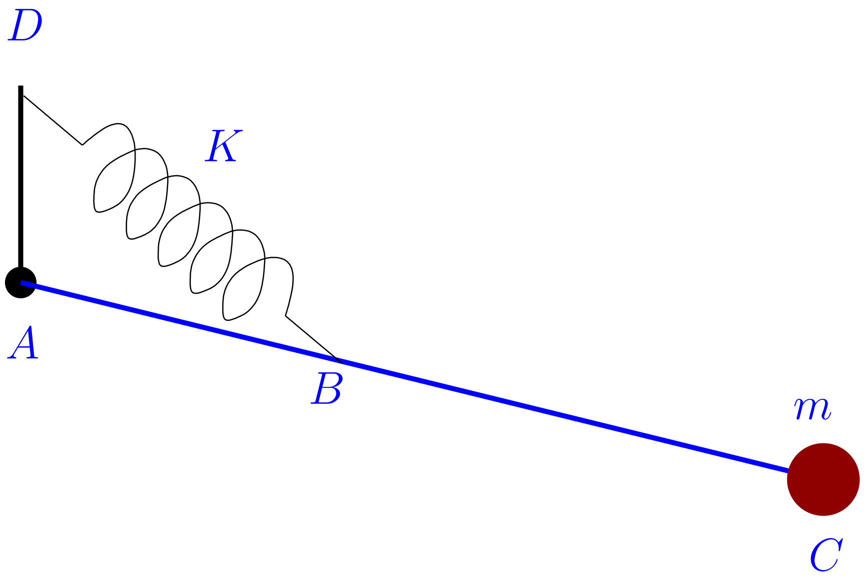

Figura 5.34.: L'oscillatore considerato nel problema.

Trovare la posizione di equilibrio e la frequenza della piccole oscillazioni attorno ad essa.

Soluzione

Introducendo come coordinata l'angolo θ dell'asta rispetto all'orizzontale possiamo scrivere l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

e l'energia potenziale

$$U = mg\ell\sin\theta + \frac{K}{2}\left[\frac{2}{9}\ell^2\left(1-\sin\theta\right)\right]$$

La posizione di equilibrio stabile corrisponde al minimo del potenziale, che è della forma

$$U = \left(mg\ell - \frac{K}{9}\ell^2\right)\sin\theta + \text{costante}$$

avremo quindi un minimo per $\theta = -\pi/2$ se $mg\ell > K\ell^2/9$ oppure per $\theta = \pi/2$ se $mg\ell < K\ell^2/9$. Se $mg\ell = K\ell^2/9$ allora $U = 0$.

Nel primo caso scriviamo $\theta = -\pi/2 + \varepsilon$ da cui

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varepsilon}^2 + \left(mg\ell - \frac{K}{9}\ell^2\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) + \text{costante} \\ &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varepsilon}^2 + \left(mg\ell - \frac{K}{9}\ell^2\right)\frac{\varepsilon^2}{2} + \text{costante} + O(\varepsilon^4)\,. \end{aligned}$$

Questa è l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\ell - K\ell^2/9}{m\ell^2}}$$

Nel secondo caso scriviamo $\theta = \pi/2 + \varepsilon$ e analogamente troviamo l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K\ell^2/9 - mg\ell}{m\ell^2}}$$