PROBLEMA 5.45

Oscillazioni di un manubrio ★★

Agli estremi di un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile sono fissate due masse m_1 e m_2 (vedere Figura 5.36). L'asta è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un perno posto su essa, a distanza $|x| \leq \ell$ dalla massa m_1. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile in funzione di x. È possibile interpretare le soluzioni ottenute per $|x| > \ell$?

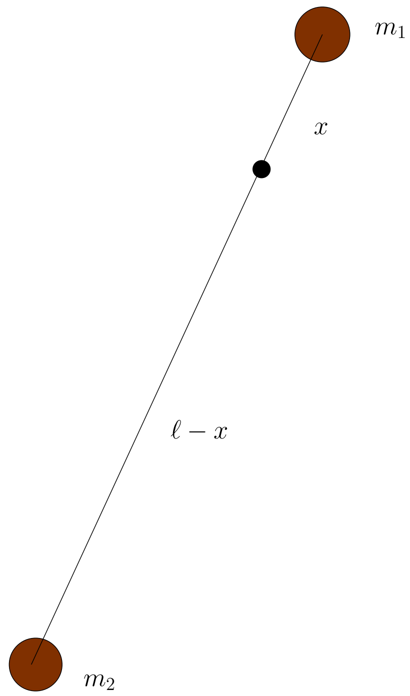

Figura 5.36.: Il manubrio considerato nel problema, libero di ruotare attorno al perno indicato dal piccolo cerchio scuro.

Soluzione

Usando come coordinata l'inclinazione θ del manubrio rispetto alla verticale possiamo scrivere l'energia del sistema come

$$E = \frac{1}{2}\left[m_1 x^2 + m_2(\ell - x)^2\right]\dot{\theta}^2 + \left[m_1 g x - m_2 g(\ell - x)\right]\cos\theta\,.$$

La posizione di equilibrio stabile corrisponde al minimo del potenziale, cioè

$$\begin{aligned} \theta = 0 \qquad & \text{se} \qquad m_1 x - m_2(\ell - x) < 0 \\ \theta = \pi \qquad & \text{se} \qquad m_1 x - m_2(\ell - x) > 0 \end{aligned}$$

ossia a seconda se il perno sia sopra o sotto il centro di massa del sistema. Trattiamo il primo caso, il secondo è completamente analogo. Per piccoli valori di θ possiamo approssimare

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

da cui

$$E = \frac{1}{2}\left[m_1 x^2 + m_2(\ell - x)^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left[m_2 g(\ell - x) - m_1 g x\right]\theta^2 + \text{costante}\,.$$

Questa è l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2 g(\ell - x) - m_1 g x}{m_1 x^2 + m_2(\ell - x)^2}}\,.$$

Per $|x| > \ell$ possiamo pensare ad una estensione della sbarra esterna alle due masse, sulla quale è posto il perno. Per $x = -L$ con L molto grande abbiamo ad esempio

$$f \sim \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$