

PROBLEMA 5.47

Lancio di un proiettile da una pedana mobile **

Nel sistema in figura 5.37 il proiettile di massa m viene lanciato da una esplosione istantanea con un angolo θ rispetto alla orizzontale, nel sistema di riferimento solidale con la piattaforma. Detta W l'energia liberata dall'esplosione determinare per quale angolo la gittata è massima. La piattaforma di lancio ha massa M ed è libera di muoversi orizzontalmente.

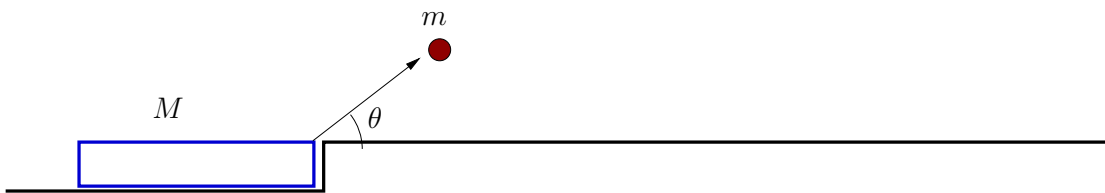


Figura 5.37.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Soluzione

Scriviamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto orizzontale tra l'istante immediatamente precedente e successivo al lancio:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}m \left[(v_0 \cos \theta + V)^2 + v_0^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{2}MV^2 \\ 0 &= MV + m(v_0 \cos \theta + V) \end{aligned}$$

dove v_0 è il modulo della velocità del proiettile nel sistema solidale con la piattaforma. Risolvendo abbiamo

$$V = -\frac{mv_0 \cos \theta}{M + m}$$

e

$$W = \frac{1}{2}m \left[\left(v_0 \cos \theta - \frac{mv_0 \cos \theta}{M + m} \right)^2 + v_0^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{2}M \frac{m^2}{(M + m)^2} v_0^2 \cos^2 \theta$$

da cui

$$v_0^2 = \frac{4(m + M)W}{m(m + 2M + m \cos 2\theta)}.$$

Le componenti della velocità del proiettile nel sistema di laboratorio sono

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{M}{M + m} v_0 \cos \theta \\ v_y &= v_0 \sin \theta \end{aligned}$$

5.47. LANCIO DI UN PROIETTILE DA UNA PEDANA MOBILE **

corrispondenti ad una gittata di

$$\ell = \frac{2v_x v_y}{g} = 2 \frac{M}{M+m} \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{4MW \sin 2\theta}{mg(m + 2M + m \cos 2\theta)}$$

che ha un massimo quando

$$\cos 2\theta = -\frac{m}{m + 2M}.$$

Questo corrisponde ad un angolo $\theta > \pi/4$. Per $M \gg m$ si ritrova il caso classico $\theta = \pi/4$.