PROBLEMA 5.49

Sistema oscillante ⋆⋆

La guida in Figura 5.39 ha la forma di una semicirconferenza di raggio R, ha massa M ed è libera di muoversi orizzontalmente. Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi al suo interno. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla sua configurazione di equilibrio stabile.

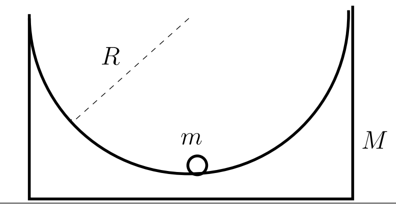

Figura 5.39.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Soluzione

Usiamo come coordinate l'angolo θ che identifica la posizione della massa e la coordinata orizzontale X della guida. L'energia totale è conservata:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] + mgR(1-\cos\theta)$$

e nel sistema di riferimento solidale con la posizione orizzontale del centro di massa la quantità di moto lungo x è nulla:

$$M\dot{X} + m\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0$$

Utilizziamo questa ultima relazione per eliminare $\dot{X}$:

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2}\frac{Mm^2}{(M+m)^2}R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta \\ & + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] + mgR(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

Per piccoli valori di $\theta, \dot{\theta}$ abbiamo $\cos\theta \simeq 1-\theta^2/2$ e $\sin\theta \simeq \theta$ quindi al secondo ordine

$$E = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2 + mgR\frac{\theta^2}{2}$$

Questa è l'energia di un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m+M)g}{MR}}$$