PROBLEMA 5.4

Un problema inverso ⋆

Una particella di massa m si muove nel piano sotto l'azione di una forza della forma

$$\vec{F} = F(r)\hat{e}_r$$

dove r è la distanza dall'origine del sistema di coordinate e $\hat{e}_r$ il versore radiale. La sua legge oraria si può scrivere per $t < t_c$ nella forma

$$\begin{aligned} r(t) &= \beta(t_c - t) \\ \theta(t) &= \frac{L}{m\beta^2(t - t_c)} \,. \end{aligned}$$

Disegnare qualitativamente la traiettoria e determinare $F(r)$.

Soluzione

Mentre $t \to t_c$ la distanza dal centro diminuisce linearmente, mentre l'angolo cresce senza limite in valore assoluto. La traiettoria è quindi una spirale che viene percorsa in senso orario mentre la particella "cade" sull'origine.

Sappiamo che il moto deve obbedire al secondo principio della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

e siamo in grado di calcolare l'accelerazione. Scriviamo anzitutto il vettore posizione nella forma

$$\vec{R} = r\hat{e}_r$$

e derivando otteniamo velocità e accelerazione

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \vec{a} &= \ddot{r}\hat{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{m}F(r)\hat{e}_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \,. \tag{5.4.1}$$

D'altra parte esplicitamente

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\beta \\ \ddot{r} &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{L}{m\beta^2(t - t_c)^2} = -\frac{L}{mr^2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{2L}{m\beta^2(t - t_c)^3} = -\frac{2L\beta}{mr^3} \,. \end{aligned}$$

Eguagliando la parte radiale nella (5.4.1) si ottiene

$$F(r) = -\frac{L^2}{mr^3}$$

mentre la parte angolare si annulla automaticamente.