PROBLEMA 5.50

Pendolo in regime di alta energia ⋆⋆⋆

Un pendolo di lunghezza ℓ viene lanciato dalla sua posizione di equilibrio con velocità iniziale v_0. Stimare il periodo del pendolo quando v_0 è molto grande, precisando cosa questo significhi. Mostrare che in prima approssimazione il periodo non dipende da g, e calcolare la prima correzione a questo risultato.

Soluzione

L'energia del pendolo si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta)$$

da cui

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell}(1 - \cos\theta)}\,.$$

Possiamo scrivere anche

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell}(1 - \cos\theta)}} \frac{d\theta}{dt} = 1$$

e integrando su un periodo membro a membro

$$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell}(1 - \cos\theta)}} \frac{d\theta}{dt} dt = T\,.$$

Introducendo come variabile di integrazione $u = \theta(t)$ abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell}(1 - \cos u)}} = T$$

dove si è tenuto conto del fatto che un periodo corrisponde a un giro completo. Ci serve il limite per grandi velocità dell'integrale precedente. Dato che $E = mv_0^2/2$ abbiamo

$$T = \frac{\ell}{v_0} \int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{2g\ell}{v_0^2}(1 - \cos u)}} \simeq \frac{\ell}{v_0} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{g\ell}{v_0^2}(1 - \cos u)\right] du$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$, valido per $\varepsilon \ll 1$. Integrando otteniamo

$$T \simeq \frac{2\pi\ell}{v_0}\left(1 + \frac{g\ell}{v_0^2}\right)\,.$$