PROBLEMA 5.52

Urto non istantaneo tra una massa e un sistema composto

⋆⋆⋆

Nel sistema in Figura 5.41 la velocità iniziale v_0 è tale da evitare il contatto tra le masse m_1 e m_3. La molla esterna ha lunghezza a riposo ℓ_0 ed è fissata alla sola massa m_3. Inoltre $m_1 = m_2 = \frac{3}{2}m_3 = m$.

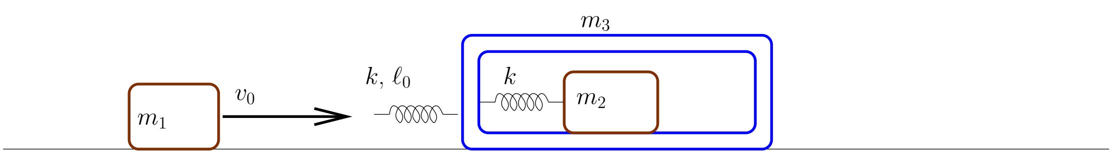

Figura 5.41.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Calcolare la velocità del centro di massa del sistema $m_2 + m_3$ dopo l'urto, e confrontarla con il caso di urto elastico istantaneo.

Soluzione

Scriviamo le equazioni del moto delle tre masse valide durante il contatto tra la molla e la massa m_1. Indicando con x_1, x_2 e x_3 le coordinate delle tre masse abbiamo

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_3 - x_1 - \ell_0)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = k(x_3 - x_2)$$

Introducendo il vettore $\underline{q}^T = (x_1 + \ell_0, x_2, x_3)$ queste possono essere scritte nella forma

$$M\underline{\ddot{q}} + K\underline{q} = 0$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}m \end{pmatrix}$$

e

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 0 & k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix}$$

Determiniamo i modi normali di vibrazione, trovando le soluzioni di

$$\left(K - \Omega^2 M\right)\underline{q} = 0$$

Il determinante della matrice vale zero per

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \Omega_0^2 = 0\\ \Omega^2 &= \Omega_1^2 = \frac{k}{m}\\ \Omega^2 &= \Omega_2^2 = 4\frac{k}{m}\end{aligned}$$

Le corrispondenti soluzioni possono scriversi a meno di una costante moltiplicativa nella forma

$$\underline{q}_0^T = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underline{q}_1^T = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underline{q}_2^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & 1 \end{pmatrix}$$

La soluzione generale delle equazioni del moto è quindi

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0\,(a_0 + b_0 t) + \underline{q}_1\,(a_1 \cos\Omega_1 t + b_1 \sin\Omega_1 t) + \underline{q}_2\,(a_2 \cos\Omega_2 t + b_2 \sin\Omega_2 t)$$

e le costanti arbitrarie si possono determinare tenendo conto che

$$\underline{q}^T(0) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \underline{q}_0 a_0 + \underline{q}_1 a_1 + \underline{q}_2 a_2$$

$$\underline{\dot{q}}^T(0) = \begin{pmatrix} v_0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \underline{q}_0 b_0 + \underline{q}_1 \Omega_1 b_1 + \underline{q}_2 \Omega_2 b_2$$

Usando l'ortogonalità dei vettori $\underline{q}_i$ rispetto al prodotto scalare definito dalla matrice M si trova facilmente

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

e

$$b_0 = \frac{3}{8}v_0, \qquad b_1 = -\frac{1}{2\Omega_1}v_0, \qquad b_2 = -\frac{3}{16\Omega_1}v_0$$

da cui

$$\begin{aligned}\underline{q}(t) &= \frac{3}{8}\underline{q}_0 v_0 t - \frac{1}{2}\underline{q}_1 \frac{v_0}{\Omega_1}\sin\Omega_1 t - \frac{3}{8}\underline{q}_2 \frac{v_0}{\Omega_1}\sin\Omega_2 t\\ \underline{\dot{q}}(t) &= \frac{3}{8}\underline{q}_0 v_0 - \frac{1}{2}\underline{q}_1 v_0 \cos\Omega_1 t - \frac{3}{4}\underline{q}_2 v_0 \cos\Omega_2 t\,.\end{aligned}$$

Determiniamo a quale tempo t^* la massa m_1 si separa nuovamente. Questo corrisponde a $x_3 - x_1 = \ell_0$ ossia

$$x_3 - x_1 - \ell_0 = -\frac{1}{2}\frac{v_0}{\Omega_1}\sin\Omega_1 t^* - \frac{1}{4}\frac{v_0}{\Omega_1}\sin 2\Omega_1 t^* = 0$$

ossia

$$\cos\Omega_1 t^* = -1$$

La velocità del centro di massa del sistema $m_2 + m_3$ sarà data da

$$v_{23} = \frac{m_2 v_2(t^*) + m_3 v_3(t^*)}{m_2 + m_3} = \frac{3}{5} v_0$$

Se l'urto è istantaneo possiamo trascurare m_2 per calcolare le velocità immediatamente successive di m_1 e m_3. In particolare per quest'ultima si avrà

$$v_3 = \frac{2m_3}{m_1 + m_3} v_0 \tag{5.52.1}$$

e quindi

$$v_{23} = \frac{m_3 v_3}{m_2 + m_3} = \frac{8}{25} v_0 \tag{5.52.2}$$